Corrigé – Polynésie 2023 J2 (accessible) – Exercice 3

Thème : Géométrie dans l'espace.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$ABCDEFGH$ est un cube. I milieu de $[AB]$, J milieu de $[EH]$, K centre de la face $BCGF$.

1. Coordonnées

$I\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$.

K centre de $BCGF$ = milieu de $[BG]$ avec $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$\boxed{K\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}}$

2. Vecteurs coplanaires

$$\overrightarrow{IJ}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{IK}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK}$.

$$\begin{cases}0=-0{,}5a+0{,}5b\\0=0{,}5a+0{,}5b\\1=a+0{,}5b\end{cases}$$

Des deux premières : $a = b$, puis $0{,}5a + 0{,}5a = a = 0$, contradiction.
Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

3. a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal à (IJK)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1\times(-0{,}5)+(-1)\times 0{,}5+1\times 1=-1+1=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK} = 1\times 0{,}5+(-1)\times 0{,}5+1\times 0{,}5=0{,}5-0{,}5+0{,}5=0{,}5\neq 0$$

Attendez, vérifions... $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK} = 0{,}5 \neq 0$. Donc $\vec{n}$ n'est pas normal à (IJK).

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à (IJK) :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}5a + 0{,}5b + c = 0 \\ 0{,}5a + 0{,}5b + 0{,}5c = 0 \end{cases}$$

En posant $a = 1$: $0{,}5 + 0{,}5b + 0{,}5c = 0 \iff 1 + b + c = 0$ et $-0{,}5 + 0{,}5b + c = 0$.
$b = -1 - c$, $-0{,}5 + 0{,}5(-1 - c) + c = -1 + 0{,}5c = 0 \iff c = 2$, $b = -3$.

$\boxed{\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est normal à } (IJK)}$

3. b. Équation de (IJK)

$(IJK) : x - 3y + 2z + d = 0$.
$I \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (IJK) : 0{,}5 + d = 0 \iff d = -0{,}5$.

$\boxed{(IJK) : x - 3y + 2z - 0{,}5 = 0 \iff 2x - 6y + 4z - 1 = 0}$

4. Intersection $(IJK) \cap (CDHG)$

Le plan $(CDHG)$ a pour équation $y = 1$ (face droite du cube).
Intersection : $\begin{cases} x - 3 \times 1 + 2z - 0{,}5 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$
$x + 2z = 3{,}5$, $y = 1$.
C'est une droite.