Corrigé – Polynésie 2023 J2 (accessible) – Exercice 2

Thème : Fonctions, équations différentielles.

Partie A

$f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{3}{2}\right) = +\infty$$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. Limite en $-\infty$

$f(x) = e^{-2x}\left(xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\right)$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ (croissances comparées).
$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$.
Par produit et somme, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. Dérivée

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times (-2)e^{-2x} = 1 - e^{-2x}$.

4. Variations

$f'(x) = 0 \iff e^{-2x} = 1 \iff -2x = 0 \iff x = 0$.
$f'(x) > 0 \iff 1 - e^{-2x} > 0 \iff e^{-2x} < 1 \iff x > 0$.
$f(0) = 0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Équation $f(x) = 0$

Sur $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) \geqslant -1$ et $f(0) = -1 < 0$, et $\lim_{-\infty} f = +\infty$, donc une solution α.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, f continue et strictement croissante, $f(0) = -1 < 0$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc une solution β.

$\boxed{f(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions sur } \mathbb{R}.}$

6. Convexité

$f''(x) = 2e^{-2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$

Partie B : Équation différentielle

1. Solution de (E) : $y' + 2y = 2x - 2$

Les solutions de $y' + 2y = 0$ sont $x \mapsto Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax + b$:

$$y_p' + 2y_p = a + 2(ax + b) = 2ax + (a + 2b) = 2x - 2$$

$$2a = 2 \implies a = 1, \quad a + 2b = -2 \implies 1 + 2b = -2 \implies b = -\frac{3}{2}$$

Les solutions de (E) sont :

$$y(x) = Ce^{-2x} + x - \frac{3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Condition $y(0) = -1$

$y(0) = C - \frac{3}{2} = -1 \iff C = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{3}{2} = f(x)}$$