

## Corrigé – Polynésie 2023 J2 (accessible) – Exercice 1

**Thème :** Probabilités, suites.

$R_n$  : « l'athlète franchit la haie lors de la  $n$ -ième séance ».  $p_n = P(R_n)$ ,  $p_0 = 0,6$ .  
 $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,9$ ,  $P_{\bar{R}_n}(\bar{R}_{n+1}) = 0,7$ .

### 1. Arbre pondéré

$$\begin{array}{l} R_n (p_n) \\ \bar{R}_n (1 - p_n) \end{array} \begin{cases} R_{n+1} (0,9) \\ \bar{R}_{n+1} (0,1) \\ R_{n+1} (0,3) \\ \bar{R}_{n+1} (0,7) \end{cases}$$

### 2. Relation $p_{n+1} = 0,6 p_n + 0,3$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3 \\ p_{n+1} &= 0,9 p_n + 0,3 - 0,3 p_n = 0,6 p_n + 0,3 \end{aligned}$$

### 3. Suite $(q_n)$ avec $q_n = p_n - 0,75$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75 = 0,6 p_n + 0,3 - 0,75 \\ q_{n+1} &= 0,6 p_n - 0,45 = 0,6 (p_n - 0,75) = 0,6 q_n \end{aligned}$$

$(q_n)$  est géométrique de raison 0,6 et  $q_0 = p_0 - 0,75 = -0,15$ .  
 $q_n = q_0 \times 0,6^n = -0,15 \times 0,6^n$ .

### 4. Expression de $p_n$

$$\begin{array}{l} p_n = q_n + 0,75. \\ \boxed{p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n} \end{array}$$

### 5. Limite

$0 < 0,6 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$ .

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75}$$

### 6. Loi binomiale

Il s'agit de la répétition de 10 épreuves aléatoires, identiques et indépendantes à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » de probabilité  $p_{10}$ .  $X \sim \mathcal{B}(10; p_{10})$ .  
 $p_{10} = 0,75 - 0,15 \times 0,6^{10} \approx 0,749$ .

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 9) = \binom{10}{9} p_{10}^9 (1 - p_{10}) + \binom{10}{10} p_{10}^{10}$$

La calculatrice donne  $P(X \geq 9) \approx 0,196$ .