Corrigé – Métropole 2026 J1 – Exercice 4

Thème : Fonction logarithme, dérivation, calcul intégral.

On considère $f(x) = a + \dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Partie A

Question 1. Justifier que $a = 1$.

Le point $A(0\,;\,1)$ appartient à la courbe représentative de f, donc $f(0) = 1$.
Calculons $f(0)$:

$$f(0) = a + \frac{b\ln(0+1)}{0+1} = a + \frac{b\ln 1}{1} = a + b \times 0 = a$$

On sait que $\ln 1 = 0$.
Donc $f(0) = a = 1$.

$$\boxed{a = 1}$$

Question 2.

a. Valeur de $f'(0)$.

La tangente T_A à la courbe au point $A(0\,;\,1)$ est représentée sur le graphique. On lit graphiquement que cette tangente est croissante et passe par les points $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,1+b')$ où b' correspond au coefficient directeur.

En lisant le graphique, la tangente au point A semble avoir un coefficient directeur positif. Graphiquement, on lit que T_A passe par $(0\,;\,1)$ et semble atteindre un certain point à $x = 1$. Le graphique indique un coefficient directeur $f'(0)$.

Calcul de $f'(x)$ pour confirmer : (voir question 3a) on obtient $f'(0) = \dfrac{b(1-\ln 1)}{1^2} = b$.

On lit graphiquement que la tangente a une pente positive, et d'après la lecture du graphique, $f'(0) = b > 0$.

$$\boxed{f'(0) = b \quad \text{(positif d'après le graphique)}}$$

b. Signe de $f''(1)$.

On sait que le signe de $f''(1)$ indique la convexité de f au point d'abscisse 1.

En observant le graphique au voisinage de $x = 1$: la courbe est au-dessous de sa tangente en A pour $x > 0$ (la courbe est concave après A). Cela signifie que f est concave sur $[0\,;\,+\infty[$, donc $f''(1) \leq 0$.

Plus précisément, le graphique montre que la courbe passe d'une phase de croissance rapide à une phase où elle croît moins vite, puis décroît, ce qui indique un changement de concavité : $f''(1) < 0$.

$$\boxed{f''(1) < 0}$$

Question 3.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$**.**

On sait que $f(x) = 1 + \dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$.

La fonction $\dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$ est un quotient. On sait que la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Posons $u = b\ln(x+1)$ et $v = x+1$.

On sait que la dérivée de $\ln(x+1)$ est $\dfrac{1}{x+1}$ (par la règle de composition).

Donc :

$$u' = \frac{b}{x+1}, \quad v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{b}{x+1} \times (x+1) - b\ln(x+1) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{b - b\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}}$$

b. En déduire la valeur de b**.**

On a montré que $f'(0) = b$ (question 2a). D'autre part :

$$f'(0) = \frac{b(1 - \ln(0+1))}{(0+1)^2} = \frac{b(1-0)}{1} = b$$

Pour déterminer b, on utilise la tangente T_A. D'après le graphique, le coefficient directeur de la tangente en $A(0\,;\,1)$ est positif.

On sait que $f'(x) = 0$ lorsque $\ln(x+1) = 1$, soit $x+1 = e$, c'est-à-dire $x = e-1$.

D'après le graphique, la courbe admet un maximum pour $x = e - 1 \approx 1{,}72$, ce qui est cohérent. La tangente T_A a donc un coefficient directeur $f'(0) = b > 0$.

La tangente T_A au point $A(0\,;\,1)$ semble passer par le point $(1\,;\,1+b)$ sur le graphique. En lisant le graphique, on identifie que $b = 4$.

Vérification : Pour $b = 4$, l'extremum de f en $x = e-1$ donne :

$$f(e-1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e} \approx 1 + 1{,}47 \approx 2{,}47$$

Ce maximum est cohérent avec le graphique.

$$\boxed{b = 4}$$

Partie B

On admet $f(x) = 1 + \dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Question 1. Justifier que $y = 1$ est asymptote.

On sait qu'une droite $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ (la fonction logarithme croît moins vite que toute fonction affine).

Justification : On pose $X = x + 1 \to +\infty$ et on sait que $\lim_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.
Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 4 \times 0 = 1$$

La droite $y = 1$ est bien asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

$$\boxed{y = 1 \text{ est asymptote à la courbe de } f.}$$

Question 2. Résoudre $1 - \ln(x + 1) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$.

$$1 - \ln(x + 1) > 0$$
$$\ln(x + 1) < 1$$

On sait que la fonction logarithme est croissante et que $\ln(e) = 1$.
Donc :

$$x + 1 < e$$
$$x < e - 1$$

En tenant compte du domaine $]-1\,;+\infty[$:

$$\boxed{1 - \ln(x + 1) > 0 \iff x \in]-1\,; e - 1[}$$

Question 3. Tableau de variation complet de f.

On a $f'(x) = \dfrac{4(1 - \ln(x + 1))}{(x + 1)^2}$.

Signe de $f'(x)$:

$(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $4(1-\ln(x+1))$, c'est-à-dire celui de $1 - \ln(x + 1)$.

D'après la question 2 :

- $f'(x) > 0$ sur $]-1\,; e - 1[$ (f croissante)
- $f'(e - 1) = 0$ (extremum)
- $f'(x) < 0$ sur $]e - 1\,;+\infty[$ (f décroissante)

Valeur de l'extremum :

$$f(e - 1) = 1 + \frac{4\ln(e - 1 + 1)}{e - 1 + 1} = 1 + \frac{4\ln e}{e} = 1 + \frac{4}{e}$$

Tableau de variation :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{4}{e}$	$\searrow$	1

$$\boxed{\text{Maximum de } f : f(e-1) = 1 + \frac{4}{e}}$$

Question 4. Équation $f(x) = 1{,}5$ dans $[2\,;\,+\infty[$.

Existence :

On sait que d'après le tableau de variation, f est continue et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ (car $2 > e-1 \approx 1{,}72$).

Calculons les valeurs aux bornes :

$$f(2) = 1 + \frac{4\ln 3}{3} \approx 1 + \frac{4 \times 1{,}0986}{3} \approx 1 + 1{,}465 \approx 2{,}465$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Puisque f est continue et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$, et que $f(2) \approx 2{,}465 > 1{,}5 > 1$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à $f(x) = 1{,}5$ dans $[2\,;\,+\infty[$.

Valeur approchée :

On cherche x tel que $f(x) = 1{,}5$ par dichotomie ou en observant que :

$f(7) = 1 + \frac{4\ln 8}{8} = 1 + \frac{4 \times 2{,}0794}{8} \approx 1 + 1{,}04 \approx 2{,}04$

$f(20) = 1 + \frac{4\ln 21}{21} \approx 1 + \frac{4 \times 3{,}044}{21} \approx 1 + 0{,}58 \approx 1{,}58$

$f(30) = 1 + \frac{4\ln 31}{31} \approx 1 + \frac{4 \times 3{,}434}{31} \approx 1 + 0{,}443 \approx 1{,}44$

Par encadrement plus fin : $f(25) \approx 1 + \frac{4 \times 3{,}258}{25} \approx 1 + 0{,}521 \approx 1{,}52$

$f(27) \approx 1 + \frac{4 \times 3{,}296}{27} \approx 1 + 0{,}488 \approx 1{,}49$

$$\boxed{x \approx 26{,}3 \approx 26{,}3 \text{ (arrondi à } 10^{-1})}$$

Question 5.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$.

On sait que pour tout réel u, la dérivée de $\frac{u^2}{2}$ est u. Donc si $u = \ln(x+1)$, et $u' = \frac{1}{x+1}$, alors :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(\ln(x+1))^2}{2}\right] = \ln(x+1) \times \frac{1}{x+1}$$

Donc une primitive de $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ est $F(x) = \dfrac{(\ln(x+1))^2}{2}$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x+1))^2}{2}\right]_0^2 = \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{(\ln 3)^2}{2} - 0$$

$$\boxed{\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln 3)^2}$$

b. Aire du domaine délimité.

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite $x = 2$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

On sait que par linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \big[x\big]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

$$\mathcal{A} = 2 + 2(\ln 3)^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2 + 2(\ln 3)^2 \text{ unités d'aire}}$$

Valeur approchée : $\mathcal{A} \approx 2 + 2 \times (1{,}0986)^2 \approx 2 + 2{,}413 \approx 4{,}413$ u.a.