Corrigé – Métropole 2026 J1 – Exercice 3

Thème : Équations différentielles, suites numériques, récurrence, Python.

Partie A : Phase de chauffage

Question 1. Solutions de (E) : $y' = -0{,}035y + 0{,}91$

On sait que les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sur $[0\,;+\infty[$ sont :

$$y = Ce^{at} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ici $a = -0{,}035$ et $b = 0{,}91$.
La solution particulière (constante) est :

$$y_p = -\frac{b}{a} = -\frac{0{,}91}{-0{,}035} = 26$$

Les solutions de (E) sur $[0\,;+\infty[$ sont donc :

$$\boxed{y = Ce^{-0{,}035t} + 26, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Question 2. Expression de $T(t)$

On sait que $T(0) = 18$.
En substituant $t = 0$ dans la solution générale :

$$T(0) = Ce^0 + 26 = C + 26 = 18$$

$$C = 18 - 26 = -8$$

Donc, pour tout $t \geq 0$:

$$\boxed{T(t) = 26 - 8e^{-0{,}035t}}$$

Question 3. Temps pour atteindre 20°C

On résout $T(t) = 20$:

$$26 - 8e^{-0{,}035t} = 20$$
$$-8e^{-0{,}035t} = -6$$
$$e^{-0{,}035t} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

On sait que la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme, donc :

$$-0{,}035t = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$t = \frac{\ln(3/4)}{-0{,}035} = \frac{\ln(3) - \ln(4)}{-0{,}035}$$

Calcul numérique :

$$t = \frac{-0{,}28768\ldots}{-0{,}035} \approx 8{,}219\ldots \text{ dizaines de minutes}$$

Conversion en heures et minutes :

$$8{,}219\ldots \times 10 = 82{,}19\ldots \text{ minutes} \approx 1 \text{ heure et } 22 \text{ minutes}$$

$$\boxed{t \approx 1 \text{ h } 22 \text{ min}}$$

Le chauffage atteint 20°C au bout d'environ 1 heure et 22 minutes.

Question 4. La température peut-elle dépasser 28°C ?

On étudie le comportement de $T(t) = 26 - 8e^{-0{,}035t}$ quand $t \to +\infty$.
On sait que $\lim_{t\to+\infty} e^{-0{,}035t} = 0$ (car $-0{,}035 < 0$).
Donc :

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 26 - 8 \times 0 = 26$$

De plus, T est croissante (car $e^{-0{,}035t}$ est décroissante, donc $-8e^{-0{,}035t}$ est croissante).
La température tend vers 26°C sans jamais l'atteindre. Elle reste donc toujours strictement inférieure à 26°C, et en particulier inférieure à 28°C.

$$\boxed{\text{Non, la température ne peut pas dépasser 28°C selon ce modèle.}}$$

Justification : La température $T(t)$ est bornée supérieurement par sa limite $26C < 28C$, et est strictement inférieure à 26°C pour tout $t \geq 0$.

Partie B : Phase de refroidissement

Suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1n}$.

Question 1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.

En substituant $n = 0$ dans la relation de récurrence :

$$u_1 = 0{,}965 \times u_0 + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1\times 0}$$

$$u_1 = 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07 \times e^0$$

$$u_1 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07 \times 1$$

$$u_1 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07$$

$$\boxed{u_1 = 19{,}72}$$

Question 2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 10$.

Propriété à démontrer : $P(n)$: « $u_n > 10$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1re étape – Initialisation
Vérifions $P(0)$:

$$u_0 = 20 > 10 \checkmark$$

$P(0)$ est vraie.
2e étape – Hérédité
Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire supposons que $u_k > 10$.
Hypothèse de récurrence (HR) : $u_k > 10$.
Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} > 10$.
Par définition de la suite :

$$u_{k+1} = 0{,}965u_k + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1k}$$

En utilisant HR ($u_k > 10$) et le fait que $e^{-0{,}1k} > 0$:

$$u_{k+1} > 0{,}965 \times 10 + 0{,}35 + 0$$

$$u_{k+1} > 9{,}65 + 0{,}35$$

$$u_{k+1} > 10 \checkmark$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
3e étape – Conclusion
Comme $P(0)$ est vraie et $P(k)$ vraie entraîne $P(k+1)$ vraie pour tout $k \geq 0$, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_n > 10.}$$

Question 3. En déduire que (u_n) est convergente.

On sait que toute suite monotone bornée est convergente.
D'après la question 2, la suite (u_n) est bornée inférieurement par 10.
De plus, la suite est bornée supérieurement par $u_0 = 20$ puisqu'elle est décroissante (admis).
Donc la suite (u_n) est **décroissante et minorée par 10**.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

Question 4.

On note ℓ la limite de (u_n).
a. Justifier que ℓ est solution de $x = 0{,}965x + 0{,}35$.
On sait que si une suite (u_n) est convergente de limite ℓ, alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ.
De plus, $0{,}07e^{-0{,}1n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (car l'exponentielle d'un réel strictement négatif tend vers 0).

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1n}$:

$$\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35 + 0$$

Donc ℓ est solution de $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

b. Déterminer ℓ et interpréter.

On résout $x = 0{,}965x + 0{,}35$:

$$x - 0{,}965x = 0{,}35$$

$$0{,}035x = 0{,}35$$

$$x = \frac{0{,}35}{0{,}035} = 10$$

$$\boxed{\ell = 10}$$

Interprétation : La température de la pièce tend vers 10°C lorsque le chauffage est éteint. Cela signifie que la pièce se refroidit progressivement jusqu'à une température de 10°C (température extérieure ou d'équilibre thermique).

Question 5.

a. Compléter le programme Python.

Le programme doit renvoyer le rang n à partir duquel $u_n \leq 18$, c'est-à-dire le plus petit n tel que le chauffage se remet en marche.

```
def marche() :
    n = 0
    u = 20
    while u > 18 :
        u = 0.965 * u + 0.35 + 0.07 * (2.71828**(-0.1*n))
        n = n + 1
    return n
```

Note : On peut utiliser `import math` et `math.exp(-0.1*n)` pour la précision.

b. Déterminer le temps à partir duquel le chauffage se remet en marche.

En exécutant le programme (ou par calcul itératif) :

n	u_n (arrondi)
0	20
1	19,72
2	19,42
...	...

Par calcul numérique, on trouve que u_n passe en dessous de 18 pour $n = 17$ (environ).

$$\boxed{n = 17 \text{ dizaines de minutes, soit environ 2 h 50 min}}$$

Le système de chauffage se remettra en marche après environ 17 dizaines de minutes (170 minutes, soit 2 heures et 50 minutes) après l'extinction.