Corrigé – Métropole 2026 J1 – Exercice 2

Thème : Géométrie dans l'espace, dénombrement. Exercice « Vrai ou Faux ».

1. Géométrie dans l'espace

On dispose de :

— (d) : $x = t$, $y = -1{,}5 - t$, $z = 2 - 2t$ $(t \in \mathbb{R})$, de vecteur directeur $\vec{u} = (1; -1; -2)$;

— $A(3; 0; 2)$, $B(2; 1; -3)$, donc $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -5)$;

— (P) : $-x + y - 5z - 0{,}5 = 0$, de vecteur normal $\vec{n} = (-1; 1; -5)$.

Affirmation 1 : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu du segment $[AB]$.

Étape 1 : Orthogonalité de (P) et (AB).
On sait qu'un plan est orthogonal à une droite si et seulement si le vecteur normal du plan est colinéaire au vecteur directeur de la droite.
Ici $\vec{n} = (-1; 1; -5)$ et $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -5)$.
Puisque $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$, les vecteurs sont colinéaires.
Donc (P) est bien orthogonal à la droite (AB). ✓
Étape 2 : Le plan (P) passe-t-il par le milieu de $[AB]$?
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I = \left(\frac{3+2}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{2+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$$

Vérifions si I appartient à (P) : on substitue dans $-x + y - 5z - 0{,}5 = 0$:

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 0{,}5$$

$$= -2{,}5 + 0{,}5 + 2{,}5 - 0{,}5 = 0 ✓$$

I vérifie l'équation du plan, donc (P) passe bien par le milieu de $[AB]$.

$\boxed{\textbf{Affirmation 1 : VRAIE.}}$

Affirmation 2 : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

Étape 1 : Les droites sont-elles parallèles ?
$\vec{u}_d = (1; -1; -2)$ et $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -5)$.
On vérifie si $\overrightarrow{AB} = k\,\vec{u}_d$: $-1 = k \times 1 \Rightarrow k = -1$, mais $-5 \neq -1 \times (-2) = 2$. Donc les droites ne sont pas parallèles.
Étape 2 : Les droites ont-elles un point commun ?
On cherche si le système suivant admet une solution (paramètres t pour (d) et s pour (AB)) :
La droite (AB) admet la représentation paramétrique :

$$x = 3 - s, \quad y = s, \quad z = 2 - 5s \quad (s \in \mathbb{R})$$

On veut : $t = 3 - s$, $-1{,}5 - t = s$ et $2 - 2t = 2 - 5s$.
De la troisième équation : $-2t = -5s$, soit $t = \dfrac{5s}{2}$.
En substituant dans la première : $\dfrac{5s}{2} = 3 - s$, soit $\dfrac{7s}{2} = 3$, d'où $s = \dfrac{6}{7}$.
Alors $t = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{15}{7}$.
Vérifions la deuxième équation :

$$-1{,}5 - \frac{15}{7} = -\frac{3}{2} - \frac{15}{7} = -\frac{21}{14} - \frac{30}{14} = -\frac{51}{14}$$

$$s = \frac{6}{7} = \frac{12}{14} \neq -\frac{51}{14}$$

Le système est incompatible. Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes.

Affirmation 2 : FAUSSE. Les droites (d) et (AB) sont gauches (non coplanaires).

Affirmation 3 : La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie à 10^{-1}, est $70{,}5$.

$C(1{,}5\,;\,-3\,;\,-1)$.
On calcule les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (3 - 1{,}5\,;\, 0 - (-3)\,;\, 2 - (-1)) = (1{,}5\,;\, 3\,;\, 3)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (2 - 1{,}5\,;\, 1 - (-3)\,;\, -3 - (-1)) = (0{,}5\,;\, 4\,;\, -2)$$

On sait que le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ est donné par :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\|}$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1{,}5 \times 0{,}5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0{,}75 + 12 - 6 = 6{,}75$$

Normes :

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{2{,}25 + 9 + 9} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$$

$$\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{0{,}5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{0{,}25 + 16 + 4} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$$

Cosinus :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{6{,}75}{4{,}5 \times 4{,}5} = \frac{6{,}75}{20{,}25} = \frac{1}{3}$$

Angle :

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}5288\ldots$$

Arrondi à 10^{-1} : $\widehat{ACB} \approx 70{,}5$.

Affirmation 3 : VRAIE.

2. Escape game – Dénombrement

Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Probabilité pour Clotilde (porte A) :

La porte A utilise un code de 3 symboles *différents* à saisir dans l'ordre, parmi 8 symboles.

On sait que le nombre d'arrangements de 3 éléments distincts parmi 8 (ordre important) est :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Il y a un unique code correct. Clotilde choisit au hasard, donc :

$$P(\text{Clotilde ouvre}) = \frac{1}{336}$$

Probabilité pour Titouan (porte B) :

La porte B utilise un code de 4 symboles *différents* pouvant être saisis dans n'importe quel ordre.

On sait que le nombre de combinaisons de 4 éléments distincts parmi 8 (ordre sans importance) est :

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

Il y a un unique ensemble correct de 4 symboles. Titouan choisit au hasard, donc :

$$P(\text{Titouan ouvre}) = \frac{1}{70}$$

Comparaison :

$$\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$$

car $70 < 336$.

Titouan a donc plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

$$\boxed{\textbf{Affirmation 4 : VRAIE.}}$$