Corrigé – Métropole 2026 J1 – Exercice 1

Thème : Probabilités conditionnelles, variable aléatoire, espérance, variance, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Partie A

Question 1.

a. On sait que $P(C) = 0{,}75$.
Justification : L'énoncé précise que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

$$\boxed{P(C) = 0{,}75}$$

b. Complétons l'arbre de probabilités.
On sait que $P(V) = 0{,}30$ donc $P(\bar{V}) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$.
On sait que $P_V(C) = 0{,}80$ donc $P_V(\bar{C}) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$.
Pour déterminer $P_{\bar{V}}(C)$ et $P_{\bar{V}}(\bar{C})$, on utilise la formule des probabilités totales à la question suivante. L'arbre complété est :

$$\begin{array}{lcl} & \xrightarrow{0{,}80} & C \\ V \ (0{,}30) & & \\ & \xrightarrow{0{,}20} & \bar{C} \\ & & \\ & \xrightarrow{?} & C \\ \bar{V} \ (0{,}70) & & \\ & \xrightarrow{?} & \bar{C} \end{array}$$

Les quatre pointillés sont : $P(V) = 0{,}30$, $P(\bar{V}) = 0{,}70$, $P_V(C) = 0{,}80$, $P_V(\bar{C}) = 0{,}20$.

Question 2.

On sait que la règle des probabilités composées donne :

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C)$$

Ici $P(V) = 0{,}30$ et $P_V(C) = 0{,}80$.

$$P(V \cap C) = 0{,}30 \times 0{,}80$$
$$\boxed{P(V \cap C) = 0{,}24}$$

Question 3.

On sait que la probabilité conditionnelle $P_C(V)$ se calcule par :

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}$$

Ici $P(V \cap C) = 0{,}24$ et $P(C) = 0{,}75$.

$$P_C(V) = \frac{0{,}24}{0{,}75}$$

$$\boxed{P_C(V) = 0{,}32}$$

La probabilité qu'une famille ayant réservé une cabine ait aussi réservé un emplacement pour un véhicule est 0,32, soit 32 %.

Question 4.

On cherche $P_{\bar{V}}(C)$.

On sait que la formule des probabilités totales donne, les événements V et $\bar{V}$ formant une partition de l'univers :

$$P(C) = P(V) \times P_V(C) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C)$$

Ici $P(C) = 0{,}75$, $P(V) = 0{,}30$, $P_V(C) = 0{,}80$ et $P(\bar{V}) = 0{,}70$.

$$0{,}75 = 0{,}30 \times 0{,}80 + 0{,}70 \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$0{,}75 = 0{,}24 + 0{,}70 \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$0{,}70 \times P_{\bar{V}}(C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51$$

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0{,}51}{0{,}70}$$

$$\boxed{P_{\bar{V}}(C) \approx 0{,}73}$$

Interprétation : Parmi les familles qui n'ont *pas* réservé d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % ont tout de même réservé une cabine. Cela signifie qu'une majorité des familles sans véhicule choisissent néanmoins le confort d'une cabine pour la traversée.

Partie B

Question 1. : Justifier que $E(X) = 96$ et $V(X) = 3114$.

Calcul de $E(X)$:

On sait que l'espérance d'une variable aléatoire discrète est :

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i)$$

Ici les valeurs et leurs probabilités sont données dans le tableau.

$$E(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24$$

$$E(X) = 0 + 4{,}2 + 51 + 40{,}8$$

$$\boxed{E(X) = 96}$$

Calcul de $V(X)$:

On sait que la variance se calcule par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Calculons d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}19 + 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24$$

$$E(X^2) = 0 + 4900 \times 0{,}06 + 10000 \times 0{,}51 + 28900 \times 0{,}24$$
$$E(X^2) = 0 + 294 + 5100 + 6936$$
$$E(X^2) = 12330$$

Donc :
$$V(X) = 12330 - 96^2 = 12330 - 9216$$
$$\boxed{V(X) = 3114}$$

Question 2.

a. Justifier que $Z = 0{,}6(X + Y)$.
La remise est de 40 %, donc la famille paie 100 % − 40 % = 60 % du montant total.
Le montant total avant réduction est $X + Y$ (suppléments + extras).
Après une réduction de 40 %, le montant payé est :

$$Z = (1 - 0{,}4)(X + Y)$$

$$\boxed{Z = 0{,}6(X + Y)}$$

b. En déduire $E(Z) = 120$ et $V(Z) = 1728$.
Calcul de $E(Z)$:
On sait que par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(0{,}6(X + Y)) = 0{,}6 \times E(X + Y) = 0{,}6 \times (E(X) + E(Y))$$

Ici $E(X) = 96$ et $E(Y) = 104$.

$$E(Z) = 0{,}6 \times (96 + 104) = 0{,}6 \times 200$$
$$\boxed{E(Z) = 120}$$

Calcul de $V(Z)$:
On sait que pour $Z = aW$ avec a constante : $V(aW) = a^2V(W)$.
De plus, X et Y étant indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

$$V(Z) = V(0{,}6(X + Y)) = (0{,}6)^2 \times V(X + Y) = 0{,}36 \times (V(X) + V(Y))$$

Ici $V(X) = 3114$ et $V(Y) = 1686$.

$$V(Z) = 0{,}36 \times (3114 + 1686) = 0{,}36 \times 4800$$
$$\boxed{V(Z) = 1728}$$

Question 3.

a. Montrer que $E(M_n) = 120$ et $V(M_n) = \dfrac{1728}{n}$.

On sait que $M_n = \dfrac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$ où les variables Z_i sont indépendantes et suivent la même loi que Z.

Calcul de $E(M_n)$:

On sait que par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times E(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \frac{1}{n} \times \big(E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n)\big)$$

Comme toutes les Z_i ont la même espérance que Z, soit $E(Z) = 120$:

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times n \times 120$$

$$\boxed{E(M_n) = 120}$$

Calcul de $V(M_n)$:

On sait que pour des variables indépendantes :

$$V(M_n) = V\left(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times \big(V(Z_1) + \cdots + V(Z_n)\big)$$

Comme toutes les Z_i ont la même variance que Z, soit $V(Z) = 1728$:

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times 1728 = \frac{1728}{n}$$

$$\boxed{V(M_n) = \frac{1728}{n}}$$

b. Plus petit entier n pour que $P(114 < M_n < 126) \geq 0{,}85$.

On remarque que l'intervalle $]114\,;\,126[$ est centré en $E(M_n) = 120$, avec un demi-écart $\delta = 126 - 120 = 6$.

On peut écrire :

$$P(114 < M_n < 126) = P(|M_n - 120| < 6) = 1 - P(|M_n - 120| \geq 6)$$

On sait que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

Ici $E(M_n) = 120$, $\delta = 6$ et $V(M_n) = \dfrac{1728}{n}$.

$$P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{1728/n}{6^2} = \frac{1728}{36n} = \frac{48}{n}$$

Donc :

$$P(114 < M_n < 126) \geq 1 - \frac{48}{n}$$

On veut $1 - \dfrac{48}{n} \geq 0{,}85$, soit :

$$\frac{48}{n} \leq 0{,}15$$

$$n \geq \frac{48}{0{,}15} = 320$$

$$\boxed{n_{\min} = 320}$$

Interprétation : En choisissant au moins 320 familles bénéficiant de la réduction, on peut affirmer avec une probabilité d'au moins 85 % que le prix total moyen payé par ces familles (suppléments + extras avec réduction) est compris entre 114 € et 126 €.