

Correction - Metropole - Jour 1 - 2025

UTSPE

Exercice 4 (points points)

Solution

Suites numériques - Modèle discret de la posidonie

Question 1: Calcul de u_1

$$u_1 = h(u_0) = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = -0,02 + 1,3 = 1,28 \text{ ha}$$

Question 2.a) Montrer que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

Par récurrence sur n :

- Initialisation: $u_0 = 1$
- Hérédité: Si $1 \leq u_n \leq 20$, alors h est croissante sur $[1, 20]$, donc

$$u_{n+1} = h(u_n) \geq h(1) = 1,28 > 1$$

et

$$u_{n+1} = h(u_n) \leq h(20) = -0,02 \times 400 + 26 = 18 < 20$$

De plus, si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $h(u_n) \leq h(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
Donc la suite est croissante.

Question 2.b) Convergence

La suite (u_n) est croissante et majorée par 20, donc elle converge.

Question 2.c) Limite

À la limite: $L = h(L) = -0,02L^2 + 1,3L$

$$L = -0,02L^2 + 1,3L$$

$$0 = -0,02L^2 + 0,3L$$

$$0 = L(-0,02L + 0,3)$$

Solutions: $L = 0$ ou $L = 15$.

Comme $L > 1$, on a $L = 15$ ha.