

# Correction - Metropole - Jour 1 - 2025

UTSPE

## Exercice 2 (points points)

### Solution

Analyse - Fonctions, dérivées, intégrales

#### Partie A: Lectures graphiques

**Question 1)**  $f'(1)$  est la pente de la tangente en A(1,2). La tangente passe par C(3,0), donc:

$$f'(1) = \frac{0-2}{3-1} = -1$$

**Question 2)** L'équation  $f'(x) = 0$  a une solution (le pic de la courbe).

**Question 3)**  $f''(0,2) > 0$  (la courbe est concave).

**Partie B: Étude analytique** Soit  $f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$ .

**Question 1)** Résoudre  $2X^2 - 3X + 2 = 0$ :

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

Pas de solutions réelles. Donc  $f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$  et  $C_f$  ne coupe pas l'axe des abscisses.

**Question 2)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $(\ln x)^2$  croît plus vite que linéairement.

**Question 3.a)**  $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$  est donné.

$$f''(x) = \frac{4 \ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{4 \ln x + 1}{x}$$

**Question 3.b)** Convexité:  $f''(x) = 0$  quand  $\ln x = -\frac{1}{4}$ , donc  $x = e^{-1/4}$ .

Point d'inflexion:  $x = e^{-1/4} \approx 0,778$

#### Partie C: Calcul d'aire

**Question 1)** Tangente  $T_B$  au point B(e, e):

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

Équation:  $y - e = 2(x - e)$ , soit  $y = 2x - e$

**Question 2)** Intégration par parties:  $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$

**Question 3)** Aire:  $\mathcal{A} = \frac{e^2-1}{4}$  unités carrées.