

Correction - Metropole - Jour 1 - 2025

UTSPE

Exercice 1 (points points)

Solution

Probabilités - Groupe sanguin et rhésus

Question 1: Arbre de probabilités

- $P(A) = 0,45$, $P_A(R) = 0,85$, $P_A(\bar{R}) = 0,15$
- $P(B) = 0,10$, $P_B(R) = 0,84$, $P_B(\bar{R}) = 0,16$
- $P(AB) = 0,03$, $P_{AB}(R) = 0,82$, $P_{AB}(\bar{R}) = 0,18$
- $P(O) = 0,42$

Question 2: Calcul de $P(B \cap R)$

Par la formule des probabilités composées:

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084$$

Interprétation: 8,4% de la population française est du groupe B avec rhésus positif.

Question 3: Calcul de $P_O(R)$

Utilisons la formule des probabilités totales:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$$

Calculs:

$$\begin{aligned}P(A \cap R) &= 0,45 \times 0,85 = 0,3825 \\P(B \cap R) &= 0,084 \\P(AB \cap R) &= 0,03 \times 0,82 = 0,0246 \\P(O \cap R) &= 0,8397 - 0,3825 - 0,084 - 0,0246 = 0,3486\end{aligned}$$

D'où:

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} = 0,83$$

Question 4: Donneur universel

$$P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times (1 - P_O(R)) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714$$

Question 5.a: Loi binomiale

$X \sim \mathcal{B}(100, 0,0714)$ car:

- 100 épreuves indépendantes (tirage avec remise)
- Deux issues: donneur universel ($p=0,0714$) ou non

Question 5.b: $P(X \leq 7) \approx 0,468$

Question 5.c: Espérance et variance

$$E(X) = 100 \times 0,0714 = 7,14$$

$$V(X) = 100 \times 0,0714 \times 0,9286 = 6,63$$

Question 6: Analyse de M_N

6.a) M_N représente la moyenne du nombre de donneurs universels par ville.

6.b) $E(M_N) = 7,14$

6.c) $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$ (démontré par linéarité de la variance)

6.d) Par Bienaymé-Tchebychev, la plus petite valeur est $N = 6766$.