Corrigé – Métropole 2023 J2 (accessible) – Exercice 4

Thème : Fonctions, logarithme, convexité.
$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. a. Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty, \qquad \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + e^{-x}) = +\infty, \qquad \lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

1. b. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0}$$

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

1. c. Dérivée

$f = \ln \circ u$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$, $u'(x) = -e^{-x}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{1}{1 + e^{x}}}$$

1. d. Variations

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$ et $-1 < 0$, donc $f'(x) < 0$.
f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

2. a. Tangente T_0 au point d'abscisse 0

$f'(0) = -\frac{1}{1+e^0} = -\frac{1}{2}$, $f(0) = \ln(1+e^0) = \ln 2$.
$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + \ln 2}$

2. b. Convexité

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$, donc $f''(x) > 0$.
$\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$

2. c. Position relative

f convexe donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes, en particulier T_0 :
$\boxed{f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x + \ln 2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})}$

3. a. Relation $f(x) - f(-x)$

$$f(x) - f(-x) = \ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^x)$$
$$f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^x}\right)$$
$$f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x+1)}{1+e^x}\right) = \ln(e^{-x})$$

$\boxed{f(x) - f(-x) = -x}$

3. b. Parallélisme de T_0 et (M_aN_a)

$M_a\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$, $N_a\begin{pmatrix} -a \\ f(-a) \end{pmatrix}$.
Coefficient directeur de (M_aN_a) :

$$m = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Les droites T_0 et (M_aN_a) ont même coefficient directeur. Elles sont parallèles.