Corrigé – Métropole 2023 J2 (accessible) – Exercice 3

Thème : Géométrie dans l'espace.

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. a. Vecteur normal à P_1

$P_1 : 2x + y - z + 2 = 0$.

$\boxed{\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}$

1. b. Plans perpendiculaires

$P_2 : x - y + z - 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc $P_1 \perp P_2$.

2. a. Équation de P_2 avec $B \in P_2$

$P_2 : x - y + z + d = 0$, $B\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \in P_2 : 1 - 1 + 2 + d = 0 \iff d = -2$.

$\boxed{P_2 : x - y + z - 2 = 0}$

2. b. Droite Δ d'intersection

$\Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Pour tout t : $2 \times 0 + (-2 + t) - t + 2 = 0$ (dans P_1)
Pour tout t : $0 - (-2 + t) + t - 2 = 0$ (dans P_2)
Δ est incluse dans P_1 et P_2, donc $\Delta = P_1 \cap P_2$.

3. a. Distance AM_t

$M_t\begin{pmatrix}0\\-2+t\\t\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM_t} = \begin{pmatrix}-1\\t-3\\t-1\end{pmatrix}$$

$$AM_t^2 = 1 + (t-3)^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - 8t + 11$$

3. b. Distance minimale AH

Soit $f(t) = 2t^2 - 8t + 11$, polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$.
Minimum en $t = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$, $f(2) = 2 \times 4 - 16 + 11 = 3$.

$$AH^2 = 3$$

$\boxed{AH = \sqrt{3}}$

4. a. Droite D_1 orthogonale à P_1 passant par A

$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \qquad\qquad k \in \mathbb{R} \\ z = 1 - k \end{cases}$$

4. b. Projeté H_1 de A sur P_1

$H_1 = D_1 \cap P_1$:

$$2(1 + 2k) + (1 + k) - (1 - k) + 2 = 0$$

$$2 + 4k + 1 + k - 1 + k + 2 = 0 \iff 6k + 4 = 0 \iff k = -\frac{2}{3}$$

$\boxed{H_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}$

5. Quadrilatère AH_1HH_2 rectangle

Par symétrie, H_2 est le projeté de A sur P_2.
On montre que $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{H_2A}$, donc AH_1HH_2 est un parallélogramme.
On vérifie $\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{H_2A} = 0$, donc un angle droit.
$\boxed{AH_1HH_2 \text{ est un rectangle.}}$