Corrigé – Métropole 2023 J2 (accessible) – Exercice 2

Thème : Suites, modélisation.

Partie A : Premier modèle

Population d'insectes : augmentation de 60% par mois. $u_0 = 0{,}1$ (million).

1. Expression de u_n

Suite géométrique de raison 1,6 : $u_{n+1} = 1{,}6\, u_n$.
$\boxed{u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n}$

2. Limite

$1{,}6 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}6^n = +\infty$.
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

3. Seuil $u_n > 0{,}4$

$$0{,}1 \times 1{,}6^n > 0{,}4 \iff 1{,}6^n > 4 \iff n\ln(1{,}6) > \ln 4 \iff n > \frac{\ln 4}{\ln(1{,}6)} \approx 2{,}95$$

$\boxed{n = 3}$
Au bout de 3 mois, la population dépasse 400 000, l'équilibre est préservé.

Partie B : Second modèle

$v_{n+1} = 1{,}6\, v_n - 1{,}6\, v_n^2$, $v_0 = 0{,}1$. $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.

1. Calcul de v_1

$v_1 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}16 - 0{,}016 = 0{,}144$
$\boxed{v_1 = 0{,}144 \text{ million, soit } 144\,000 \text{ insectes}}$

2. a. Points fixes

$$f(x) = x \iff 1{,}6x - 1{,}6x^2 = x \iff 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \iff x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0$$

$\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 0{,}375}$

2. b. Variations de f sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$

$f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x$.
$f'(x) \geqslant 0 \iff 1{,}6 \geqslant 3{,}2x \iff x \leqslant \frac{1}{2}$.
f est croissante sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$.

3. a. Récurrence : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

Initialisation : $v_0 = 0{,}1$, $v_1 = 0{,}144$, $0 \leqslant 0{,}1 \leqslant 0{,}144 \leqslant 0{,}5$. Vrai.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
f croissante sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$, donc $f(0) \leqslant f(v_k) \leqslant f(v_{k+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.
$f(0) = 0$, $f(v_k) = v_{k+1}$, $f(v_{k+1}) = v_{k+2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4 \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant \frac{1}{2}$. Hérédité vraie.
Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. b. Convergence

(v_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) converge vers $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

3. c. Limite

ℓ est un point fixe de f : $\ell = 0$ ou $\ell = 0{,}375$.
$v_0 = 0{,}1 > 0$ et (v_n) croissante, donc $\ell \neq 0$.
$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0{,}375}$
À long terme, 375 000 insectes, jamais 400 000. L'équilibre est respecté.

4. Algorithme seuil

a. `seuil(0.4)` ne renvoie rien car $v_n < 0{,}4$ pour tout n.
b. `seuil(0.35)` renvoie 6 car $v_5 < 0{,}35$ et $v_6 > 0{,}35$.