Corrigé – Métropole 2023 J1 (accessible) – Exercice 4

Thème : Géométrie dans l'espace.
Cube $ABCDEFGH$. Repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

1. Coordonnées

$$E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

2. Représentation paramétrique de (EC)

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. (EC) orthogonale à (GBD)

$$\overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{0}$.

$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GB} = 1\times 0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) = 0$$
$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GD} = 1\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times(-1) = 0$$

(EC) est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires de (GBD), donc $(EC) \perp (GBD)$.

4. a. Équation cartésienne de (BDG)

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (BDG).
$(BDG) : x + y - z + d = 0$.
$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in (BDG) : 1 + 0 - 0 + d = 0 \iff d = -1$.
$\boxed{(BDG) : x + y - z - 1 = 0}$

4. b. Point $I = (EC) \cap (BDG)$

$$t + t - (1-t) - 1 = 0 \iff 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{I\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

4. c. Distance $d(E,\, BDG)$

$$\overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$EI = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \frac{4}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(E,\, BDG) = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

5. a. Triangle BDG équilatéral

$$BD = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$BG = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$DG = \sqrt{(0-1)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$BD = BG = DG = \sqrt{2}$ donc BDG est équilatéral.

5. b. Aire de BDG

Côté $c = \sqrt{2}$. Dans un triangle équilatéral, aire $= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$$\boxed{\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

6. Volume du tétraèdre $EGBD$

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BDG} \times EI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{V_{EGBD} = \frac{1}{3}}$$