

Corrigé – Métropole 2023 J1 (accessible) – Exercice 3

Thème : Suites, modélisation.

Première modélisation

$$u_0 = 3 \text{ (centaines de questions)}, u_{n+1} = 0,9 u_n + 1,3.$$

1. Calcul de u_1 et u_2

$$u_1 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 2,7 + 1,3 = 4,0$$

$$u_2 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 3,6 + 1,3 = 4,9$$

Au 2^e mois : 400 questions. Au 3^e mois : 490 questions.

2. Expression de u_n

Montrons par récurrence : $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 1 = 13 - \frac{100}{9} = 3$. Vrai.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $u_k = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^k$.

$$u_{k+1} = 0,9 u_k + 1,3$$

$$u_{k+1} = 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^k \right) + 1,3$$

$$u_{k+1} = 11,7 - 10 \times 0,9^{k+1} + 1,3$$

$$u_{k+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{k+1}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

3. Monotonie

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9}(0,9^{n+1} - 0,9^n) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1 \geq 0$$

La suite (u_n) est croissante.

4. Programme seuil

Le programme renvoie le plus petit n tel que $u_n > 8,5$.

$$u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5$$

$$0,9^n < 0,405 \iff n \ln 0,9 < \ln 0,405 \iff n > \frac{\ln 0,405}{\ln 0,9} \approx 8,57$$

Le programme renvoie $n = 9$

Deuxième modélisation

$$v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)} \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Calculs

$$v_1 = 9 - 6e^0 = 3, v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \approx 4,04.$$

2. Seuil $v_n = 8,5$

$$\begin{aligned} 9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 8,5 &\iff e^{-0,19(n-1)} = \frac{0,5}{6} = \frac{1}{12} \\ -0,19(n-1) = -\ln 12 &\iff n = 1 + \frac{\ln 12}{0,19} \approx 14,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{n = 15}$$

Comparaison

1^{ère} modélisation : 850 questions au 9^e mois. 2^{de} : au 15^e mois. La 1^{ère} conduit à une modification plus rapide.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 13 \text{ (1300 questions) et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 9 \text{ (900 questions).}$$

La 1^{ère} modélisation prévoit le plus de questions à long terme.