Corrigé – Métropole 2023 J1 (accessible) – Exercice 2

Thème : Fonctions, logarithme népérien.
f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

1. Limite en 0

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Donc $\lim_{x\to 0}(-8\ln x) = +\infty$.

$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

2. Limite en $+\infty$

$$f(x) = x^2\left(1 - 8\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc par produit :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. Dérivée

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$$

4. Tableau de variations

Pour $x > 0$, $x + 2 > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - 2$.

$$f(2) = 4 - 8\ln 2 = 4(1 - \ln 4)$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,2]$

Sur $]0\,;\,2]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.
$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $f(2) = 4(1 - \ln 4) \approx -1{,}54$, et $0 \in [f(2)\,;\,+\infty[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,2]$.

Sur $[2\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement croissante, $f(2) < 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc une unique solution aussi.

Au total, $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $]0\,;\,+\infty[$.

6. Signe de f

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Fonction $g_k(x) = f(x) + k$

g_k a les mêmes variations que f, translatée de k.
On veut $g_k(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$, soit $f(x) \geqslant -k$ pour tout x.
La plus petite valeur de f est $f(2) = 4 - 8\ln 2$.
Donc $-k \leqslant 4 - 8\ln 2$, soit $k \geqslant 8\ln 2 - 4$.
$\boxed{k_{\min} = 8\ln 2 - 4}$