

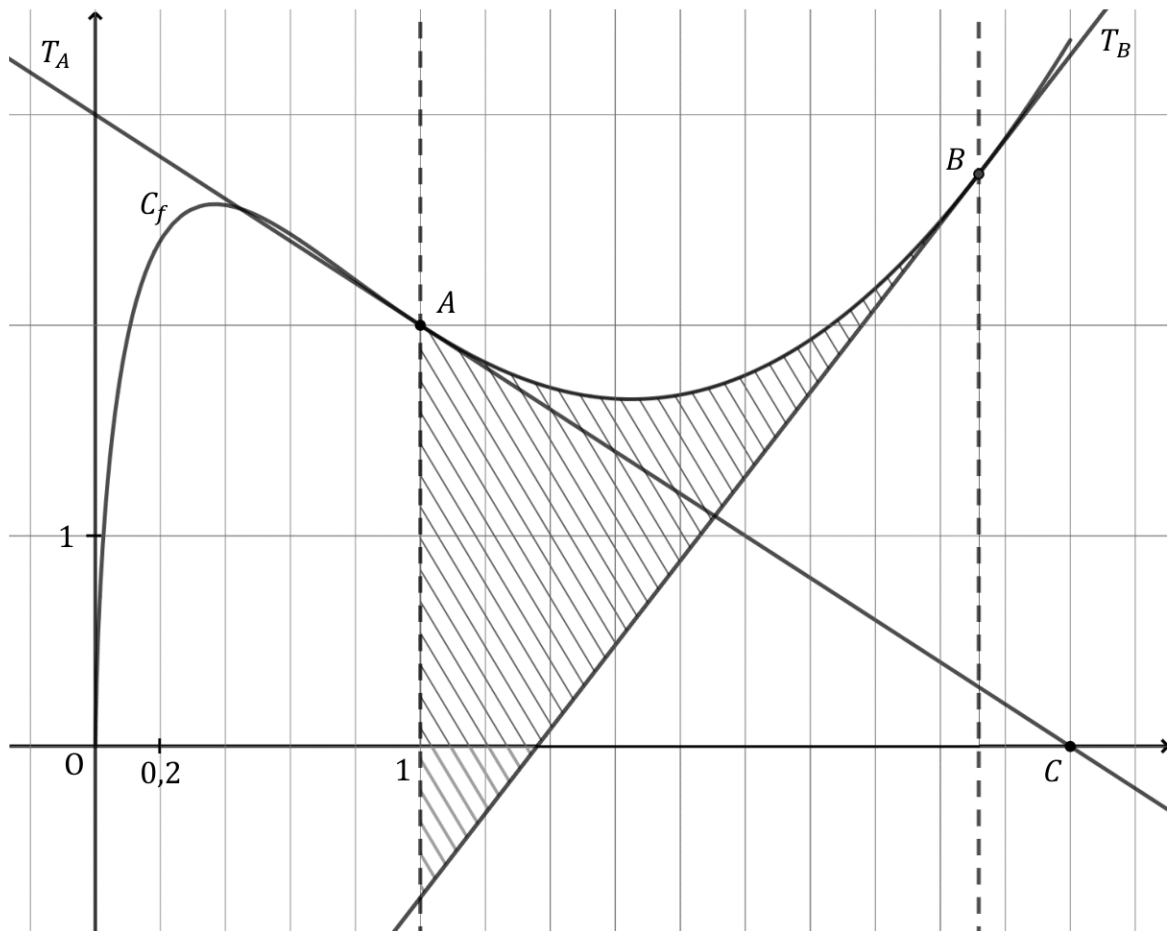
Exercice 2 (6 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée C_f , sur l'intervalle $]0 ; 3]$;
- la droite T_A , tangente à C_f au point $A(1 ; 2)$;
- la droite T_B , tangente à C_f au point $B(e ; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3 ; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0 ; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$.
3. On note \mathcal{A} l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2-1}{4}$.
En déduire la valeur exacte de \mathcal{A} en unité d'aire.