SECONDE - MATHÉMATIQUES

Chapitre 9

Probabilités conditionnelles et simulations

Programme officiel — Seconde générale et technologique Source officielle (education.gouv.fr — BO du 2 avril 2026)

Capacités et contenus exigibles — Programme officiel (BO)

- Expérience aléatoire, univers, issues, événement.
- Calculer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité.
- Utiliser la formule du complémentaire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
- Comprendre et calculer une probabilité conditionnelle $P_A(B)$.
- Construire et exploiter un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée.
- Distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$, notamment dans des situations de type tests ou faux positifs.
- Simuler une expérience aléatoire et estimer des probabilités par la fréquence.
- Observer la loi des grands nombres (version vulgarisée) : « lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité ».
- Comprendre la notion de fluctuation d'échantillonnage.

Algorithmique — Programme officiel (BO)

- Simuler des expériences aléatoires avec Python.
- Estimer une probabilité par simulation.

1. Introduction

Les probabilités permettent de quantifier l'incertitude. Dès lors qu'une expérience a plusieurs résultats possibles sans qu'on puisse prédire lequel se réalisera, on est dans un cadre probabiliste. Les probabilités sont utilisées en sciences, en médecine, en économie et dans tous les jeux de hasard.

2. Cours

A — Vocabulaire

Définition — Expérience aléatoire

Une expérience est aléatoire lorsqu'on ne peut pas prévoir avec certitude son résultat. L'ensemble des résultats possibles est l'**univers** Ω.

Définition — Événement

Un événement est une partie de l'univers Ω. Il est réalisé si le résultat appartient à cet événement. L'événement contraire de A est $\bar{A}$.

Exemple — Lancer un dé

Univers : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Événement "nombre pair" : $A = \{2; 4; 6\}$.

B — Calcul de probabilités

Propriété — Équiprobabilité

Si toutes les issues sont équiprobables : $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

Propriété — Formules fondamentales

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

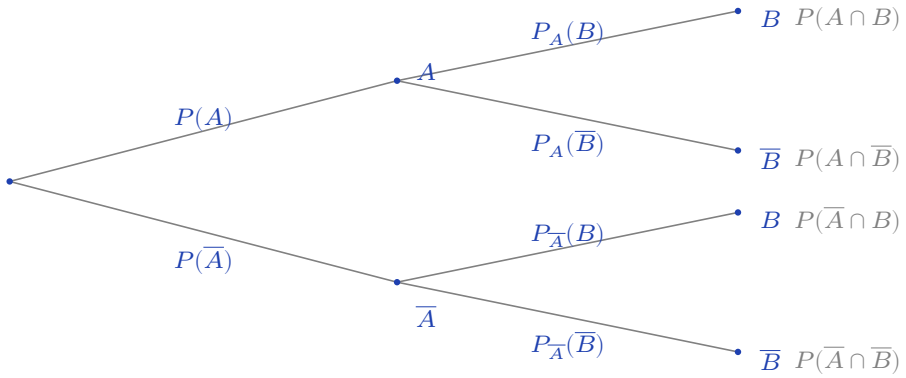
C — Probabilités conditionnelles

Définition — Probabilité conditionnelle

Si A est un événement de probabilité non nulle, $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant que A est réalisé. Dans une population équiprobable : $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

Propriété — Arbre pondéré

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches. Les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1.



Arbre pondéré à deux niveaux. Sur chaque branche du 2e niveau figure une probabilité conditionnelle ; la probabilité d'une feuille est le produit des branches du chemin : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Méthode — Lire un arbre

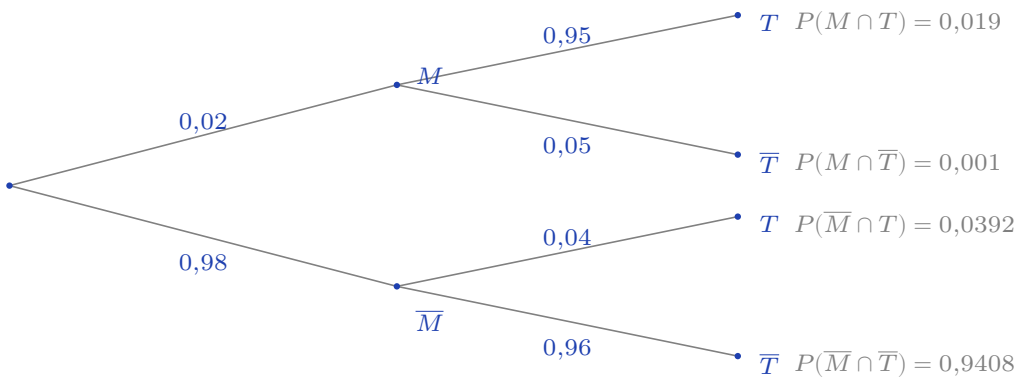
1. Les branches partant d'un même nœud ont une somme de probabilités égale à 1. 2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches. 3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Point de vigilance :

En général $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont différents. Confondre ces deux probabilités est une erreur fréquente, par exemple dans les situations de tests diagnostiques.

D — Exemple : un test de dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population : $P(M) = 0{,}02$. Un test est positif (T) chez 95 % des malades et chez 4 % des non-malades. On traduit l'énoncé par un arbre pondéré.



Vrais positifs $P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019$; faux positifs $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}04 = 0{,}0392$. Un test positif est donc plus souvent un faux positif : $P_T(M) = \dfrac{0{,}019}{0{,}019 + 0{,}0392} \approx 0{,}33$.

3. Python — Simulations

Méthode — Simuler un lancer de dé et estimer une probabilité

```
from random import randint

n = 10000
compteur = 0
for k in range(n):
    de = randint(1, 6)
    if de % 2 == 0:       # nombre pair
        compteur += 1

frequence = compteur / n
print(f"Fréquence de pair : {frequence:.4f}")
print(f"Probabilité théorique : 0.5")
```

4. Exercices progressifs

Exercice 1 — Dé équilibré

Calculer la probabilité d'obtenir : 1. le 6 ; 2. un nombre pair ; 3. un nombre > 4 ; 4. ne pas obtenir 1.

Exercice 2 — Carte tirée au hasard

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. 1. Probabilité d'obtenir un roi. 2. Probabilité d'obtenir un cœur. 3. Probabilité de ne pas obtenir un roi.

Exercice 3 — Probabilité conditionnelle

Dans une classe de 30 élèves, 18 font anglais, 12 font espagnol et 7 font les deux. On choisit un élève au hasard. Calculer $P_{\text{anglais}}(\text{espagnol})$ puis $P_{\text{espagnol}}(\text{anglais})$. Comparer.

Exercice 4 — Arbre pondéré

Un test est positif chez 95 % des personnes malades et chez 4 % des personnes non malades. Traduire ces informations sur un arbre pondéré en distinguant bien les probabilités conditionnelles.

5. Fiche de synthèse

À retenir — Équiprobabilité
$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues totales}}$.
À retenir — Complémentaire
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
À retenir — Union
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
À retenir — Conditionnelle
$P_A(B)$ signifie : probabilité de B sachant A. Dans un tableau d'effectifs équiprobable : $\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.
À retenir — Arbre
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches.
À retenir — Loi des grands nombres
Lorsque n est grand, la fréquence observée d'un événement est, sauf exception, proche de sa probabilité.