SECONDE - MATHÉMATIQUES

Chapitre 8

Colinéarité, déterminant et droites

Programme officiel — Seconde générale et technologique Source officielle (education.gouv.fr — BO du 2 avril 2026)

Capacités et contenus exigibles — Programme officiel (BO)

- Caractériser la colinéarité de deux vecteurs par la nullité du déterminant ; l'appliquer à l'alignement et au parallélisme.
- Vecteur directeur, coefficient directeur (pente) d'une droite.
- Équation réduite $y = mx + p$ et équation cartésienne $ax + by + c = 0$ d'une droite.
- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, d'un point et d'un vecteur directeur, ou d'un point et de la pente.
- Reconnaître si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes données par leur équation réduite.

Démonstrations et méthodes — Programme officiel (BO)

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Algorithmique — Programme officiel (BO)

- Étudier l'alignement de trois points du plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

1. Introduction

Ce chapitre relie la géométrie et l'algèbre : les droites sont des objets géométriques que l'on décrit par des équations. Le déterminant fournit un critère de colinéarité qui caractérise l'alignement et le parallélisme, et permet d'établir une équation de droite. Trouver le point d'intersection de deux droites sécantes est un lien fondamental entre géométrie et calcul pour toute la suite du lycée.

2. Cours

A — Colinéarité et déterminant

Propriété — Déterminant de deux vecteurs

Le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$. Ils sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$.

Méthode — Alignement de A, B, C

Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis leur déterminant. S'il est nul, les points sont alignés.

Méthode — Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque leur déterminant est nul.

B — Vecteur directeur, pente et équations de droites

Définition — Vecteur directeur et pente

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul de même direction que la droite. Pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, la pente (coefficient directeur) est le réel m.

Définition — Équation réduite

Une droite non verticale a une équation de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur (pente) et p l'ordonnée à l'origine.

Définition — Équation cartésienne

Toute droite peut s'écrire $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur est alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Propriété — Droites parallèles

Deux droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Méthode — Équation d'une droite passant par deux points

À partir de $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, calculer la pente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis déterminer p avec les coordonnées d'un des deux points.

C — Intersection de deux droites

Définition — Point d'intersection

Deux droites sécantes se coupent en un unique point, dont les coordonnées vérifient simultanément les deux équations réduites.

Méthode — Déterminer le point d'intersection

Pour deux droites d'équations $y = mx+p$ et $y = m'x+p'$ (avec $m \neq m'$), on résout $mx+p = m'x+p'$ pour trouver l'abscisse, puis on calcule l'ordonnée avec l'une des équations.

Exemple — Résolution

Droites $y = 2x + 1$ et $y = -x + 4$. On résout $2x + 1 = -x + 4$, soit $3x = 3$, donc $x = 1$ et $y = 3$. Point d'intersection : $(1 ; 3)$.

3. Exercices progressifs

Exercice 1 — Alignement

Soient $A(0 ; 1)$, $B(2 ; 5)$ et $C(4 ; 9)$. Les points sont-ils alignés ?

Exercice 2 — Équation de droite

Déterminer une équation de la droite passant par $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 8)$.

Exercice 3 — Intersection de deux droites

Les droites $d : y = 3x - 1$ et $d' : y = -x + 7$ sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. Fiche de synthèse

À retenir — Déterminant
$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$. Nul $\Leftrightarrow$ vecteurs colinéaires $\Leftrightarrow$ points alignés / droites parallèles.
À retenir — Droite
Équation réduite $y = mx + p$, cartésienne $ax + by + c = 0$; parallèles si même pente m.
À retenir — Intersection
Pour deux droites sécantes $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, on résout $mx + p = m'x + p'$.