

Terminale Spécialité Mathématiques

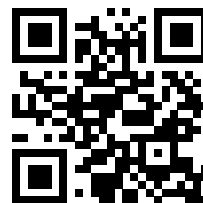
Chapitre 14 : Loi des grands nombres

40 exercices — Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, concentration

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques

Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU

Site : utspe.com



utspe.com

Rappel de cours

Transformation affine : Si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$.

Inégalité de Markov : Si $X \geq 0$ et $a > 0$, alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

Inégalité de concentration : Si $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(1, p)$ i.i.d., $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$:

$$P(|M_n - p| \geq a) \leq \frac{p(1-p)}{na^2} \leq \frac{1}{4na^2}.$$

Loi des grands nombres : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - p| \geq \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Partie A — Transformation affine $Y = aX + b$ (Ex. 1–8)

Exercice 1 — Loi binomiale et transformation



Soit $X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$.

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- Soit $Y = 2X + 1$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- Donner l'interprétation concrète si X = nombre de faces sur 4 lancers d'une pièce équilibrée.

Exercice 2 — Propriétés générales



Soit X une variable aléatoire avec $E(X) = 3$ et $V(X) = 4$.

- Calculer $E(2X - 1)$.
- Calculer $V(3X + 2)$ et $\sigma(3X + 2)$.
- Calculer $\sigma(2X)$.

Exercice 3 — Loi binomiale : espérance, variance, écart-type

Soit $X \sim \mathcal{B}(10; 0,3)$.

- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Soit $Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- Cette variable Y s'appelle la variable centrée réduite associée à X .

Exercice 4 — Centrage-réduction

Soit X une variable aléatoire avec $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

- Calculer $E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$ et $V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$.
- On note $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Que peut-on dire de $E(Y)$ et $V(Y)$?

Exercice 5 — Trouver a et b 

Soit X avec $E(X) = 5$ et $\sigma(X) = 2$. On pose $Y = aX + b$.

- Trouver les valeurs de a et b telles que $E(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.
- Calculer $E(Y^2)$ en utilisant $E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2$.

Exercice 6 — Calcul de $E(X^2)$ 

On rappelle que $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$.

- Calculer $E(X^2)$ pour $X \sim \mathcal{B}(6; 0,4)$.
- Calculer $E(X^2)$ pour X avec $E(X) = 4$ et $V(X) = 3$.

Exercice 7 — Score normalisé

Les résultats d'un test suivent une loi X avec $E(X) = 60$ et $\sigma(X) = 15$. On normalise avec $Y = \frac{X - 60}{15} \times 10 + 50$.

- Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
- Si un élève obtient 75 à l'épreuve originale, quel est son score Y ?

Exercice 8 — Conversion Celsius/Fahrenheit

La relation entre Celsius (C) et Fahrenheit (F) est $F = \frac{9}{5}C + 32$.

- Si la température moyenne est $E(C) = 20^\circ$ et $V(C) = 9$ (en Celsius), calculer $E(F)$ et $V(F)$.
- Calculer l'écart-type $\sigma(F)$.

Partie B — Inégalité de Markov (Ex. 9–14)

Exercice 9 — Application de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(5; 0,4)$.

- Calculer $E(X)$.
- Majorer $P(X \geq 4)$ par l'inégalité de Markov.
- Calculer la valeur exacte de $P(X \geq 4)$.
- Comparer et commenter la précision de l'inégalité.

Exercice 10 — Majorations diverses

Soit X une variable positive avec $E(X) = 2$.

- Majorer $P(X \geq 6)$.
- Majorer $P(X \geq 10)$.
- Minorer $P(X < 6)$.

Exercice 11 — Durée de vie

La durée de vie (en heures) d'une ampoule a pour espérance $E(X) = 1000$.

- Majorer $P(X \geq 2000)$ par Markov.
- Majorer $P(X \geq 5000)$.
- Ces majorations sont-elles réalistes ? Commenter.

Exercice 12 — Temps d'attente

Le temps d'attente moyen à un guichet est $E(X) = 5$ minutes. X est une variable positive.

- Majorer $P(X \geq 20 \text{ min})$ par Markov.
- Majorer $P(X \geq 1 \text{ heure})$.

Exercice 13 — Implication de Markov

a) Démontrer que $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ implique $P(X < a) \geq 1 - \frac{E(X)}{a}$.

b) Application : si $E(X) = 3$, minorer $P(X < 12)$.

Exercice 14 — Limite de l'inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire prenant la valeur 0 avec probabilité $1 - p$ et la valeur M avec probabilité p .

- Calculer $E(X)$.
- Calculer exactement $P(X \geq M)$.
- Appliquer Markov pour $a = M$: que donne-t-on et est-ce précis ?

Partie C — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Ex. 15–22)

Exercice 15 — Application directe

Soit $X \sim \mathcal{B}(10; 0,5)$.

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- Majorer $P(|X - 5| \geq 3)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Minorer $P(|X - 5| < 3)$.

Exercice 16 — Loi binomiale, $n = 20$

Soit $X \sim \mathcal{B}(20; 0,4)$.

- Calculer $E(X)$, $V(X)$.
- Majorer $P(|X - 8| \geq 4)$.
- Minorer $P(4 \leq X \leq 12)$.

Exercice 17 — Comparaison Markov / Bienaymé-Tchebychev

Soit X avec $E(X) = 4$ et $V(X) = 2$.

- Majorer $P(X \geq 8)$ par Markov.
- Majorer $P(|X - 4| \geq 4)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- Sachant que $P(X \geq 8) = P(X - 4 \geq 4) \leq P(|X - 4| \geq 4)$, comparer les deux majorations.

Exercice 18 — Minoration de probabilité

Soit X avec $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

- Exprimer $P(|X - \mu| < a)$ en fonction de $P(|X - \mu| \geq a)$.
- Montrer que $P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$.
- Montrer que $P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$.

Exercice 19 — Mesure physique

On effectue n mesures d'une grandeur physique. Chaque mesure X_i vérifie $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$.

- Par Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X_i - \mu| \geq 2\sigma)$.
- Interpréter : quelle proportion de mesures s'écarte de la moyenne de plus de 2σ ?

Exercice 20 — Règle des 2σ

Soit X avec $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

- En prenant $a = 2\sigma$ dans Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$.

- b) En prenant $a = 3\sigma$, majorer $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$.
- c) Interpréter ces résultats en termes de concentration de probabilité.



Exercice 21 — Application à $X \sim \mathcal{B}(20; 0,5)$



Soit $X \sim \mathcal{B}(20; 0,5)$.

- a) Calculer $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = V(X)$, σ .
- b) Majorer $P(|X - 10| \geq 3)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- c) Calculer la valeur exacte de $P(|X - 10| \geq 3)$ à la calculatrice.
- d) Comparer avec la borne donnée par Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 22 — Démonstration de l'inégalité



On admet que si X est une variable aléatoire prenant des valeurs discrètes x_i , alors :

$$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \geq \sum_{|x_i - E(X)| \geq a} a^2 P(X = x_i).$$

- a) Conclure que $V(X) \geq a^2 P(|X - E(X)| \geq a)$.
- b) En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Partie D — Concentration et loi des grands nombres (Ex. 23–32)

Exercice 23 — Fréquence et concentration, $n = 100$



On effectue $n = 100$ lancers d'une pièce équilibrée ($p = 0,5$). Soit M_{100} la fréquence de pile.

- a) Calculer $E(M_{100})$ et $V(M_{100})$.
- b) Majorer $P(|M_{100} - 0,5| \geq 0,1)$ par l'inégalité de concentration.
- c) Minorer $P(|M_{100} - 0,5| < 0,1)$.

Exercice 24 — Fréquence et concentration, $n = 400$



Même situation avec $n = 400$.

- a) Majorer $P(|M_{400} - 0,5| \geq 0,05)$.
- b) Comparer avec le résultat de l'exercice 23.

Exercice 25 — Taille minimale d'échantillon



On veut que $P(|M_n - p| \geq 0,01) \leq 0,05$.

- a) En utilisant $P(|M_n - p| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2}$, trouver la taille minimale n .
- b) Que vaut n si l'on veut $P(|M_n - p| \geq 0,01) \leq 0,01$?

Exercice 26 — Fréquence de pile, $n = 1000$

On lance $n = 1000$ fois une pièce équilibrée. Majorer la probabilité que la fréquence de pile soit hors de l'intervalle $[0,45; 0,55]$.

Exercice 27 — Sondage

Un sondage est effectué sur $n = 1000$ personnes. On suppose que la proportion réelle est $p = 0,6$.

- Majorer $P(|M_{1000} - 0,6| \geq 0,03)$.
- Minorer la probabilité que la fréquence observée soit dans $[0,57; 0,63]$.

Exercice 28 — Borne maximale de $p(1-p)$

- Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0; 1]$.
- En déduire l'inégalité $P(|M_n - p| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2}$, quelle que soit la valeur de p .

Exercice 29 — Intervalle de confiance à 95%

On veut construire un intervalle de confiance tel que $P(|M_n - p| \geq a) \leq 0,05$.

- En utilisant $\frac{1}{4na^2} \leq 0,05$, exprimer a en fonction de n .
- Pour $n = 1000$, calculer l'intervalle de confiance $[M_n - a; M_n + a]$.

Exercice 30 — Convergence en probabilité

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

(Utiliser l'inégalité $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ et faire tendre $n \rightarrow +\infty$.)

Exercice 31 — Influence de n sur la précision

On observe la fréquence M_n pour différentes valeurs de n et $p = 0,5$.

- Compléter le tableau suivant (majorer $P(|M_n - 0,5| \geq 0,1)$) :

n	borne de $P(M_n - 0,5 \geq 0,1)$
100	
400	
1000	
10000	

- Commenter la convergence.

Exercice 32 — Problème inverse : trouver p

Un fabricant affirme que $p = 0,02$ (2% de défauts). On teste $n = 500$ pièces et on observe $M_{500} = 0,05$.

- Sous l'hypothèse $p = 0,02$, majorer $P(|M_{500} - 0,02| \geq 0,03)$.
- Cette observation est-elle compatible avec $p = 0,02$? Commenter.

**Partie E — Type Baccalauréat (Ex. 33–40)****Exercice 33 — Bienaymé-Tchebychev sur $\mathcal{B}(50; 0,4)$ ()**

Soit $X \sim \mathcal{B}(50; 0,4)$.

- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- Majorer $P(|X - 20| \geq 10)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- Minorer $P(10 \leq X \leq 30)$.
- Calculer la valeur exacte de $P(|X - 20| \geq 10)$ à la calculatrice et comparer.

**Exercice 34 — Contrôle qualité et concentration ()**

Un lot de pièces présente une proportion de défauts $p = 0,05$. On contrôle un échantillon de $n = 200$ pièces.

- Soit M_{200} la fréquence de défauts observée. Calculer $E(M_{200})$ et $V(M_{200})$.
- Majorer $P(|M_{200} - 0,05| \geq 0,03)$.
- En déduire une minoration de $P(0,02 \leq M_{200} \leq 0,08)$.

**Exercice 35 — Sondage et intervalle de confiance ()**

Un sondage sur $n = 500$ personnes donne une fréquence de $M_{500} = 0,52$.

- Rappeler la formule de l'intervalle de confiance à 95% : $\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.
- Calculer cet intervalle pour $n = 500$.
- Peut-on conclure que $p > 0,5$ avec une confiance de 95%? Expliquer.

**Exercice 36 — Revenu mensuel ()**

Le revenu mensuel dans une entreprise suit une loi X avec $E(X) = 2000$ € et $\sigma(X) = 500$ €.

- Majorer $P(X \geq 5000)$ par l'inégalité de Markov.
- Majorer $P(|X - 2000| \geq 2000)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- Ces bornes semblent-elles réalistes? Commenter.



Exercice 37 — Convergence de la moyenne ()



Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. avec $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- Calculer $E(M_n)$.
- Calculer $V(M_n)$ en admettant que les X_i sont indépendantes.
- Par Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|M_n - \mu| \geq \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ fixé.
- Conclure sur la convergence en probabilité de M_n vers μ .

Exercice 38 — Problème complet : loi binomiale + Bienaymé-Tchebychev ()



Un médicament est efficace avec probabilité $p = 0,7$ pour chaque patient. On le prescrit à $n = 30$ patients. Soit X le nombre de succès.

- Quelle loi suit X ? Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
- Majorer $P(|X - 21| \geq 6)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- Soit $Y = 2X - 3$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- Calculer $P(X \geq 24)$ à la calculatrice.

Exercice 39 — L'inégalité de concentration découle de Bienaymé-Tchebychev ()



Soit X_1, \dots, X_n des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ indépendantes. On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

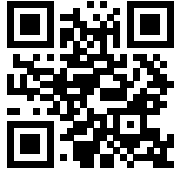
- Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
- Appliquer Bienaymé-Tchebychev à M_n avec $a > 0$.
- Montrer que $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.
- En déduire l'inégalité de concentration $P(|M_n - p| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2}$.

Exercice 40 — Problème final type Bac complet ()



Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On effectue n tirages avec remise. On note M_n la fréquence de boules blanches obtenues.

- Quelle loi suit nM_n ?
- Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
- Pour $n = 500$ et $M_{500} = 0,45$, construire un intervalle de confiance à 95%.
- Majorer $P(|M_{500} - p| \geq 0,05)$ sans connaître p .
- Combien de tirages faut-il pour que $P(|M_n - p| \geq 0,02) \leq 0,01$?



Site du cours



Corrigés des exercices

utspe.com