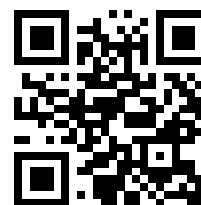


# Terminale Spécialité Mathématiques

## Chapitre 13 : Calcul intégral

40 exercices — Primitives, propriétés, IPP, aires et applications



utspe.com

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques

Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU

Site : utspe.com

### Rappel de cours

**Primitives usuelles** :  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  ( $n \neq -1$ ),  $\int e^x dx = e^x + C$ ,  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ,  
 $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$ ,  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$ .

**Formes composées** :  $\int u' e^u dx = e^u + C$ ,  $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$ ,  $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ,  $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + C$ .

**IPP** :  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ .

**Propriétés** : Relation de Chasles, linéarité, positivité. **Valeur moyenne** :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

### Partie A — Calcul de primitives et intégrales (Ex. 1–10)

#### Exercice 1 — Primitives usuelles



Calculer une primitive  $F(x)$  de chaque fonction :

a)  $f(x) = x^3$

c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  (pour  $x > 0$ )

b)  $f(x) = e^x$

d)  $f(x) = \cos(x)$

#### Exercice 2 — Intégrale d'un polynôme



Calculer  $\int_0^2 (3x^2 + 2x - 1) dx$ .

#### Exercice 3 — Intégrales classiques



Calculer :

a)  $\int_0^1 e^x dx$

b)  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

c)  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$

**Exercice 4 — Forme  $u'e^u$** 

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int 2x e^{x^2} dx$

b)  $\int_0^1 (2x + 1)e^{x^2+x} dx$

**Exercice 5 — Forme  $u'/u$** 

Calculer :

a)  $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

b)  $\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3} dx$

**Exercice 6 — Forme  $u'u^n$** 

Calculer :

a)  $\int x(x^2+1)^3 dx$

b)  $\int_0^1 3x^2(x^3+2)^4 dx$

**Exercice 7 — Forme  $u'/\sqrt{u}$** 

Calculer :

a)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

b)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

**Exercice 8 — Primitives de fonctions trigonométriques composées**

Calculer une primitive de chaque fonction :

a)  $f(x) = \sin(5x)$

b)  $f(x) = \cos(3x - 2)$

c)  $f(x) = \cos(x) \sin^3(x)$  (poser  $u = \sin(x)$ )

**Exercice 9 — Intégrale d'une somme**Calculer  $\int_0^\pi (2 \sin(x) + 3 \cos(x)) dx$ .**Exercice 10 — Calcul direct**

Calculer en justifiant chaque étape :

a)  $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$  (développer le quotient)

b)  $\int_0^2 |x-1| dx$  (séparer en deux parties)

## Partie B — Propriétés des intégrales (Ex. 11–18)

## Exercice 11 — Relation de Chasles



On sait que  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  et  $\int_1^3 f(x) dx = -1$ .

- Calculer  $\int_0^3 f(x) dx$ .
- Calculer  $\int_3^0 f(x) dx$ .

## Exercice 12 — Linéarité



On sait que  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  et  $\int_0^2 g(x) dx = 3$ .

Calculer  $\int_0^2 (2f(x) + 3g(x)) dx$ .

## Exercice 13 — Signe d'une intégrale



Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$ .

- Si  $f(x) \geq 0$  sur  $[a; b]$ , que peut-on dire de  $\int_a^b f(x) dx$  ?
- Si  $f(x) \leq 0$  sur  $[a; b]$ , que peut-on dire de  $\int_a^b f(x) dx$  ?
- Calculer  $\int_0^2 |x - 1| dx$  en découpant en  $[0; 1]$  et  $[1; 2]$ .

## Exercice 14 — Valeur moyenne



- Calculer la valeur moyenne de  $f(x) = x^2$  sur  $[0; 3]$ .
- Calculer la valeur moyenne de  $g(x) = e^x$  sur  $[0; 1]$ .
- Interpréter la valeur moyenne dans chaque cas.

## Exercice 15 — Encadrement d'une intégrale



Sur  $[0; 1]$ , on a  $1 \leq e^x \leq e$ .

- En déduire un encadrement de  $\int_0^1 e^x dx$ .
- Vérifier en calculant exactement cette intégrale.

## Exercice 16 — Comparaison d'intégrales



Soit  $f$  et  $g$  continues sur  $[a; b]$  avec  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a; b]$ .

- Démontrer que  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

b) Application : comparer  $\int_0^1 e^{-x} dx$  et  $\int_0^1 1 dx$ .



### Exercice 17 — Intégrale et parité



a) Si  $f$  est impaire sur  $[-a; a]$ , calculer  $\int_{-a}^a f(x) dx$ .

b) Si  $f$  est paire sur  $[-a; a]$ , simplifier  $\int_{-a}^a f(x) dx$ .

c) Application : calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$  et  $\int_{-1}^1 x^2 dx$ .

### Exercice 18 — Fonction intégrale



On définit  $F(x) = \int_0^x (t^2 + 1) dt$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Calculer  $F(x)$  explicitement.

b) Vérifier que  $F'(x) = x^2 + 1$ .

c) Calculer  $F(2)$  et  $F(-1)$ .

## Partie C — Intégration par parties (Ex. 19–26)

### Exercice 19 — IPP : $\int x e^x dx$



Calculer  $\int_0^1 x e^x dx$  par intégration par parties en choisissant  $u = x$  et  $v' = e^x$ .

### Exercice 20 — IPP : $\int x \cos(x) dx$



Calculer  $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$  par IPP.

### Exercice 21 — IPP : $\int x \sin(x) dx$



Calculer  $\int_0^{\pi} x \sin(x) dx$  par IPP.

### Exercice 22 — IPP : $\int \ln(x) dx$



Calculer  $\int_1^e \ln(x) dx$  en choisissant  $u = \ln(x)$  et  $v' = 1$ .

### Exercice 23 — IPP : $\int x \ln(x) dx$



Calculer  $\int_1^e x \ln(x) dx$ .

**Exercice 24 — Double IPP :  $\int x^2 e^x dx$** 

Calculer  $\int_0^1 x^2 e^x dx$  en effectuant deux intégrations par parties successives.

**Exercice 25 — IPP croisées :  $\int e^x \cos(x) dx$** 

Calculer  $I = \int e^x \cos(x) dx$ .

- Effectuer une première IPP avec  $u = e^x$  et  $v' = \cos(x)$ .
- Effectuer une deuxième IPP sur le terme restant.
- On obtient une équation  $I = \dots - I$  : résoudre pour  $I$ .

**Exercice 26 — IPP :  $\int \arctan(x) dx$** 

On admet que  $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Calculer  $\int_0^1 \arctan(x) dx$  en choisissant  $u = \arctan(x)$  et  $v' = 1$ .

**Partie D — Aires et applications (Ex. 27–34)****Exercice 27 — Aire entre  $y = x^2$  et  $y = x$** 

- Trouver les intersections de  $y = x^2$  et  $y = x$ .
- Calculer l'aire de la région délimitée par les deux courbes sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 28 — Aire entre  $y = e^x$  et  $y = x + 1$** 

- Montrer que  $e^x \geq x + 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Calculer l'aire entre les courbes  $y = e^x$  et  $y = x + 1$  sur  $[0; 2]$ .

**Exercice 29 — Aire entre sin et cos**

- Trouver les intersections de  $y = \sin(x)$  et  $y = \cos(x)$  sur  $[0; \pi/2]$ .
- Calculer l'aire délimitée par les deux courbes sur  $[0; \pi/4]$ .

**Exercice 30 — Aire sous  $f(x) = x^3 - x$** 

- Trouver les zéros de  $f(x) = x^3 - x$  sur  $[-1; 1]$ .
- Calculer l'aire totale entre la courbe et l'axe des abscisses sur  $[-1; 1]$ .

**Exercice 31 — Valeur moyenne de sin sur  $[0; \pi]$** 

- Calculer  $\int_0^\pi \sin(x) dx$ .
- En déduire la valeur moyenne de sin sur  $[0; \pi]$ .

c) Interpréter : à quel point  $c \in [0; \pi]$  a-t-on  $\sin(c) =$  valeur moyenne ?



### Exercice 32 — Volume de révolution



On fait tourner la courbe  $y = x$  autour de l'axe des abscisses sur  $[0; 1]$ . Le volume obtenu est :

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

- Calculer  $V$  pour  $f(x) = x$  (cône).
- Calculer  $V$  pour  $f(x) = \sqrt{x}$  (demi-sphère?).
- Vérifier que le premier résultat correspond à la formule  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$  d'un cône.

### Exercice 33 — Encadrement de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$



Sur  $[0; 1]$ , on a  $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$ .

- En déduire un encadrement de  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ .
- Donner une valeur approchée à 0,1 près.

### Exercice 34 — Application physique



Un objet se déplace avec une vitesse  $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$  (en m/s,  $t$  en secondes).

- Calculer la distance parcourue sur  $[0; 3]$ .
- Calculer la vitesse moyenne sur  $[0; 3]$ .

## Partie E — Type Baccalauréat (Ex. 35–40)

### Exercice 35 — IPP et suite ( )



Soit  $S_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

- Calculer  $S_0$  et  $S_1$  directement.
- Par IPP, montrer que  $S_n = e - n S_{n-1}$ .
- Calculer  $S_2$ .
- Montrer que  $0 \leq S_n \leq \frac{e}{n+1}$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ .

### Exercice 36 — $f(x) = (2x + 1)e^x$ ( )



Soit  $f(x) = (2x + 1)e^x$ .

- Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer  $\int_0^2 f(x) dx$  par IPP.

c) Interpréter géométriquement le résultat.



### Exercice 37 — Aire entre deux paraboles ( )

On considère  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = 2x - x^2$ .

a) Trouver les intersections de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

b) Montrer que  $g(x) \geq f(x)$  sur l'intervalle délimité par les intersections.

c) Calculer l'aire délimitée par les deux courbes.



### Exercice 38 — Suite $S_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ : analyse asymptotique ( )

On reprend la suite de l'exercice 35. Montrer que la suite  $(n S_n)$  converge et calculer sa limite.

*Indication : utiliser la relation  $S_n = e - n S_{n-1}$  pour exprimer  $n S_n$  et étudier la limite.*



### Exercice 39 — Vitesse moyenne et physique ( )

Un véhicule part de l'origine à  $t = 0$ . Sa vitesse (en km/h) est donnée par  $v(t) = 60 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$  pour  $t \in [0; 4]$  (en heures).

a) Calculer la distance totale parcourue sur  $[0; 4]$ .

b) Calculer la vitesse moyenne sur  $[0; 4]$ .

c) À quel instant la vitesse est-elle maximale ?



### Exercice 40 — Problème complet type Bac ( )

Soit  $f(x) = (x - 1)e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

a) Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  admet un minimum. Calculer sa valeur.

c) Calculer  $\int_0^2 f(x) dx$  par IPP.

d) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par  $\mathcal{C}_f$  et l'axe des abscisses sur  $[0; 2]$ .

e) Calculer la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 2]$ .



Site du cours



Corrigés des exercices

utspe.com