

# Terminale Spécialité Mathématiques

## Chapitre 12 : Fonctions cosinus et sinus

40 exercices — Valeurs remarquables, équations, dérivées, primitives

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques  
Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU  
Site : [utspe.com](http://utspe.com)



[utspe.com](http://utspe.com)

### Rappel de cours

Valeurs fondamentales :

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

**Identité fondamentale :**  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

**Dérivées :**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(\sin u)' = u' \cos u$ ,  $(\cos u)' = -u' \sin u$ .

**Primitives :**  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$ ,  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$ .

**Parité :**  $\cos(-x) = \cos(x)$  (paire),  $\sin(-x) = -\sin(x)$  (impaire).

**Périodicité :**  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques.

### Partie A — Valeurs remarquables et cercle trigonométrique (Ex. 1–8)

#### Exercice 1 — Tableau des valeurs fondamentales



Sans calculatrice, donner les valeurs exactes de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  pour :

$$x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

#### Exercice 2 — Parité des fonctions



Utiliser la parité pour simplifier :

a)  $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c)  $\cos(-x + \pi)$

b)  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

d)  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

**Exercice 3 — Périodicité**Simplifier en utilisant la périodicité  $2\pi$  :

a)  $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

c)  $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

b)  $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

d)  $\sin(2024\pi)$

**Exercice 4 — Formules de symétrie**Simplifier (on rappelle :  $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ,  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ ) :

a)  $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

c)  $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

b)  $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

d)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

**Exercice 5 — Valeurs hors tableau**

Calculer exactement :

a)  $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

b)  $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

c)  $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

**Exercice 6 — Résolution :  $\cos(x) = \frac{1}{2}$** Résoudre  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  sur  $[0; 2\pi]$ . Donner les solutions exactes.**Exercice 7 — Résolution :  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$** Résoudre  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  sur  $[0; 2\pi]$ . Illustrer sur le cercle trigonométrique.**Exercice 8 — Résolution :  $\cos(x) = -1$** Résoudre  $\cos(x) = -1$  sur  $[-\pi; \pi]$ , puis donner les solutions dans  $\mathbb{R}$ .**Partie B — Équations trigonométriques (Ex. 9–16)****Exercice 9 — Équations en cosinus**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  en appliquant  $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = \pm a + 2k\pi$  :

a)  $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

b)  $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**Exercice 10 — Équations en sinus**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  en appliquant  $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi$  :

a)  $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

b)  $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exercice 11 — Équation linéaire**Résoudre  $2 \sin(x) - 1 = 0$  sur  $[0; 2\pi]$ .**Exercice 12 — Équation en  $\cos(2x)$** Résoudre  $\cos(2x) = \frac{1}{2}$  sur  $[0; 2\pi]$ . Donner toutes les solutions.**Exercice 13 — Équation avec déphasage**Résoudre  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $\mathbb{R}$ .**Exercice 14 — Équation en  $\cos^2$** a) Résoudre  $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$  dans  $\mathbb{R}$ . (*Penser à  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ .*)b) Donner les solutions sur  $[0; 2\pi]$ .**Exercice 15 — Équation du second degré en  $\cos$** Résoudre  $2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$  dans  $\mathbb{R}$ . (*Poser  $X = \cos(x)$  et résoudre d'abord l'équation en  $X$ .*)**Exercice 16 —  $\sin(x) = \cos(x)$** a) Montrer que  $\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1$ .b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .c) Donner les solutions sur  $[-\pi; \pi]$ .**Partie C — Dérivées et primitives (Ex. 17–24)****Exercice 17 — Dérivées de fonctions composées**Calculer  $f'(x)$  pour chaque fonction :a)  $f(x) = \sin(3x)$ b)  $f(x) = \cos(x^2)$ c)  $f(x) = \sin(e^x)$ d)  $f(x) = \cos(\ln x)$  (pour  $x > 0$ )**Exercice 18 — Dérivées de produits**Calculer  $f'(x)$  :a)  $f(x) = x \sin(x)$ b)  $f(x) = \cos^2(x)$ 

c)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  (pour  $x \neq 0$ )

d)  $f(x) = e^x \cos(x)$

**Exercice 19 — Primitives**Calculer une primitive  $F(x)$  de chaque fonction :

a)  $f(x) = \sin(2x)$

b)  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c)  $f(x) = x \cos(x^2)$

d)  $f(x) = \sin(3x + 1)$

**Exercice 20 — Étude de  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$** a) Calculer  $f'(x)$ .b) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .c) Trouver le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ . (On pourra écrire  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .)**Exercice 21 — Étude de  $f(x) = \sin^2(x)$** a) Montrer que  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ .b) En déduire  $f'(x)$ .c) Dresser le tableau de variations sur  $[0; \pi]$ .**Exercice 22 — Intégrale de sin sur  $[0; \pi]$** a) Calculer  $\int_0^\pi \sin(x) dx$ .

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

**Exercice 23 — Intégrale de cos sur  $[0; \pi/2]$** a) Calculer  $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ .b) Calculer  $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$ . (Utiliser  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ .)**Exercice 24 — Aire sous la courbe**Calculer l'aire délimitée par la courbe  $y = \sin(x)$  et l'axe des abscisses sur  $[0; \pi]$ .

## Partie D — Étude de fonctions trigonométriques (Ex. 25–32)

**Exercice 25** —  $f(x) = 2 \sin(x) - x$ 

- Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0; \pi]$ .
- Montrer que  $f$  admet un unique zéro sur  $]0; \pi[$  et l'encadrer à 0,1 près.

**Exercice 26** — Résolution par TVI :  $\cos(x) = \frac{x}{2}$ 

- Montrer que l'équation  $\cos(x) = \frac{x}{2}$  a une solution dans  $[0; 1]$ .
- Encadrer cette solution à 0,1 près en calculant  $f(0)$ ,  $f(0,5)$ ,  $f(1)$  où  $f(x) = \cos(x) - \frac{x}{2}$ .

**Exercice 27** —  $f(x) = e^x \sin(x)$  sur  $[0; 2\pi]$ 

- Calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 2\pi]$ .
- Dresser le tableau de variations et trouver les extrema locaux.

**Exercice 28** —  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ 

- Admettre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Quelle valeur donner à  $f$  en 0 pour la rendre continue ?
- Calculer  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .
- Montrer que  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(x) = x$ .

**Exercice 29** — Forme  $a \sin(x) + b \cos(x)$ Soit  $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3} \cos(x)$ .

- Montrer que  $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .
- En déduire le maximum et le minimum de  $f$ .
- Résoudre  $f(x) = 1$ .

**Exercice 30** — Tangente à la courbeSoit  $f(x) = \sin(x)$ .

- Calculer  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
- Écrire l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 31** —  $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$ 

- Calculer  $f'(x)$ .
- Résoudre  $f'(x) = 0$  sur  $[0; \pi]$ . (Factoriser en utilisant  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ .)
- Dresser le tableau de variations sur  $[0; \pi]$ .

**Exercice 32** — Résolution graphique

On cherche les solutions de l'équation  $\cos(x) = \frac{x}{3}$  sur  $[0; 3]$ .

- Montrer qu'il existe exactement une solution en étudiant  $g(x) = \cos(x) - \frac{x}{3}$ .
- Encadrer cette solution à 0,1 près.

**Partie E** — Type Baccalauréat (Ex. 33–40)**Exercice 33** — Étude complète de  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  ( )

Soit  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  sur  $[0; 2\pi]$ .

- Montrer que  $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .
- Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .
- Calculer  $\int_0^\pi f(x) dx$ .
- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$  et l'axe des abscisses sur  $[0; \pi]$ .

**Exercice 34** —  $f(x) = e^x \cos(x)$  ( )

Soit  $f(x) = e^x \cos(x)$  sur  $[0; \pi]$ .

- Calculer  $f'(x)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; \pi]$ .
- Calculer  $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$  par intégration par parties (on admettra que  $\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C$ ).

**Exercice 35** — TVI et trigonométrie ( )

Soit  $h(x) = 2\cos(x) - x$  sur  $[0; \pi]$ .

- Calculer  $h(0)$  et  $h(\pi)$  : conclure sur l'existence d'une solution à  $h(x) = 0$ .
- Calculer  $h'(x)$  et montrer que  $h$  est strictement décroissante sur  $[0; \pi]$ .
- Conclure que l'équation  $h(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; \pi[$ , et l'encadrer.

## Exercice 36 — Oscillation physique ( )



La position d'un pendule est modélisée par  $x(t) = 3 \cos(2t + \frac{\pi}{6})$  (en cm,  $t$  en secondes).

- Quelle est l'amplitude de l'oscillation ? La période ?
- Calculer  $x(0)$ ,  $x'(0)$  (vitesse initiale).
- À quels instants  $t \in [0; 2\pi]$  la position est-elle nulle ?
- Quand la position est-elle maximale ?

Exercice 37 — Suite récurrente  $u_{n+1} = \cos(u_n)$  ( )

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \cos(u_n)$ .

- Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  (valeurs approchées en radians).
- Admettre que la suite converge vers une limite  $\ell$ . Montrer que  $\ell$  vérifie  $\cos(\ell) = \ell$ .
- Cette équation s'appelle le point fixe du cosinus. Encadrer  $\ell$  à 0,01 près.

## Exercice 38 — Aire entre deux courbes ( )



On considère  $f(x) = \sin(x)$  et  $g(x) = \cos(x)$  sur  $[0; \pi]$ .

- Trouver les intersections de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $[0; \pi]$ .
- Calculer  $\int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx$  et  $\int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx$ .
- En déduire l'aire totale délimitée par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $[0; \pi]$ .

Exercice 39 — Inégalité  $|\sin(x)| \leq |x|$  ( )

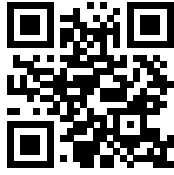
- Soit  $g(x) = x - \sin(x)$  sur  $[0; +\infty[$ . Montrer que  $g$  est croissante.
- En déduire que  $\sin(x) \leq x$  pour tout  $x \geq 0$ .
- En utilisant la parité de  $\sin$ , démontrer que  $|\sin(x)| \leq |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Application : en déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

## Exercice 40 — Problème complet type Bac ( )

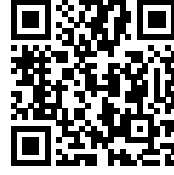


Soit  $f(x) = x - \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $f$  est impaire.
- Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement une solution  $\alpha$  sur  $]0; 2\pi[$  et l'encadrer à 0,1 près.
- Calculer  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .



Site du cours



Corrigés des exercices

[utspe.com](https://utspe.com)