Terminale Spécialité Mathématiques

Chapitre 11 : Combinatoire et dénombrement

40 exercices — Factorielle, arrangements, combinaisons, loi binomiale

---

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques
Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU
Site : `utspe.com`

utspe.com

Rappel de cours

Factorielle : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, avec $0! = 1$.

Arrangements : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (listes ordonnées de k éléments parmi n).

Combinaisons : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (sous-ensembles de k éléments parmi n).

Pascal : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$.

Loi binomiale : $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Partie A — Factorielle et arrangements (Ex. 1–8)

Exercice 1 — Calculs de factorielles

Calculer chacune des expressions suivantes :

a) $5!$ b) $\dfrac{8!}{6!}$ c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

Exercice 2 — Simplifications de factorielles

Simplifier les expressions suivantes (donner le résultat en fonction de n) :

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Exercice 3 — Équation avec factorielle

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 10$.

Exercice 4 — Mots de 3 lettres distinctes

On dispose des 6 lettres A, B, C, D, E, F.

a) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former ?

b) Combien d'entre eux commencent par la lettre A ?

Exercice 5 — Placement sur des chaises

On souhaite placer 5 personnes sur 5 chaises numérotées, une personne par chaise.

a) Combien de façons différentes existe-t-il ?

b) Et si la personne A doit obligatoirement s'asseoir sur la chaise 1 ?

Exercice 6 — Podium

Lors d'une compétition, 10 athlètes s'affrontent. Combien de podiums (or, argent, bronze) distincts peut-on obtenir ?

Exercice 7 — Codes PIN

Un code PIN est formé de 4 chiffres distincts choisis parmi $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

a) Combien de codes PIN distincts peut-on former ?

b) Combien commencent par le chiffre 5 ?

Exercice 8 — Arrangements avec contraintes

On forme des arrangements de 4 éléments parmi 7.

a) Calculer A_7^4.

b) Combien d'arrangements ont un élément particulier fixé en première position ?

Partie B — Combinaisons (Ex. 9–16)

Exercice 9 — Calculs de combinaisons

Calculer sans calculatrice :

a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{8}{3}$ c) $\binom{10}{0}$ d) $\binom{n}{n}$

Exercice 10 — Symétrie des combinaisons

a) Vérifier que $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$.

b) Démontrer la formule générale $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exercice 11 — Relation de Pascal

a) Vérifier numériquement que $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.

b) Démontrer la relation de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exercice 12 — Triangle de Pascal

Écrire les 6 premières lignes du triangle de Pascal (de la ligne 0 à la ligne 5). Retrouver $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{5}{0}$ dans ce triangle.

Exercice 13 — Choix d'élèves

Dans une classe de 20 élèves, combien de façons peut-on choisir :

a) Un groupe de 3 élèves (sans tenir compte de l'ordre) ?

b) Un délégué et un délégué adjoint (ordre important) ?

Exercice 14 — Mains de cartes

Un jeu de 52 cartes. Combien de mains de 5 cartes peut-on distribuer ?

Exercice 15 — Sous-comités

Un comité de 10 membres doit former un sous-comité de 4 personnes. Combien de sous-comités distincts peut-on former ?

Exercice 16 — Équation combinatoire

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $\binom{n}{2} = 15$. *(Rappel :* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$*.)*

Partie C — Dénombrement combiné (Ex. 17–24)

Exercice 17 — Pizzas

Une pizzeria propose 8 ingrédients différents. Combien de pizzas différentes peut-on commander avec exactement 3 ingrédients ?

Exercice 18 — Équipe de football

Un entraîneur doit sélectionner 11 joueurs parmi 16 disponibles. Combien de sélections différentes peut-il faire ?

Exercice 19 — Mots avec répétitions

On forme des mots de 4 lettres en utilisant les 26 lettres de l'alphabet (les répétitions sont autorisées).

a) Combien de mots différents peut-on former ?

b) Combien commencent par la lettre M ?

Exercice 20 — Lancer de dés

On lance 3 dés à 6 faces.

a) Combien d'issues possibles y a-t-il (les dés sont distingués) ?

b) Combien d'issues donnent trois faces identiques ?

Exercice 21 — Comité avec contrainte

Un comité de 5 personnes est tiré parmi 4 hommes et 6 femmes.

a) Combien de comités comprennent au moins une femme ? *(Utiliser la méthode du complémentaire.)*

b) Combien comprennent exactement 2 femmes ?

Exercice 22 — Chemins dans une grille

On se déplace dans une grille 4×4 depuis le coin inférieur gauche jusqu'au coin supérieur droit, en ne faisant que des pas vers la droite (D) ou vers le haut (H).

a) Combien de pas droite et combien de pas haut faut-il effectuer ?

b) Combien de chemins différents existe-t-il ?

Exercice 23 — Poignées de mains

Dans un groupe de n personnes, chaque personne serre la main de chacune des autres exactement une fois.

a) Exprimer le nombre de poignées de mains en fonction de n.

b) Calculer ce nombre pour $n = 10$ puis $n = 20$.

Exercice 24 — Parties d'un ensemble

Soit $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

a) Combien de sous-ensembles possède E ? *(Admettre 2^n.)*

b) Vérifier pour $n = 3$ en listant tous les sous-ensembles.

c) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Partie D — Lien avec la loi binomiale (Ex. 25–32)

Exercice 25 — Calcul d'une probabilité binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(5; 0{,}4)$.

a) Calculer $P(X = 3)$ en utilisant la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

b) Calculer $P(X \leqslant 1)$.

Exercice 26 — Développement binomial

Développer $(1+x)^4$ en utilisant les coefficients binomiaux. Vérifier le résultat pour $x=1$ et $x=-1$.

Exercice 27 — Somme des probabilités

Démontrer que la somme des probabilités d'une loi $\mathcal{B}(n,p)$ vaut 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

(Utiliser le théorème du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$*.)*

Exercice 28 — Probabilités cumulées

Soit $X \sim \mathcal{B}(4;\, 0{,}3)$.

a) Calculer $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$.

b) Calculer chaque terme $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$.

Exercice 29 — Espérance et variance

Soit $X \sim \mathcal{B}(10;\, 0{,}6)$.

a) Calculer l'espérance $E(X) = np$.

b) Calculer la variance $V(X) = np(1-p)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 30 — Retrouver les paramètres

Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ vérifie $E(X) = 6$ et $V(X) = 2{,}4$.

a) Exprimer $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ en fonction de n et p.

b) Trouver p à partir de $\dfrac{V(X)}{E(X)} = 1 - p$.

c) En déduire n.

Exercice 31 — Probabilités partielles

Soit $X \sim \mathcal{B}(6;\, 0{,}2)$. Calculer $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$.

Exercice 32 — Schéma de Bernoulli

Un médecin teste un médicament sur 8 patients. La probabilité qu'un patient guérisse est $p = 0{,}7$.

a) Identifier la loi suivie par X = « nombre de guérisons ».

b) Calculer $P(X \geqslant 6)$.

c) Calculer l'espérance : en moyenne, combien de patients guérissent ?

Partie E — Type Baccalauréat (Ex. 33–40)

Exercice 33 — QCM aléatoire ( )

Un QCM comporte 10 questions, chacune ayant 4 propositions dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard. On note X le nombre de bonnes réponses.

a) Quelle loi suit X ? Préciser les paramètres.

b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 10)$.

c) Calculer $P(X \geqslant 6)$ (on pourra utiliser la calculatrice).

d) Calculer $E(X)$: est-ce un résultat surprenant ?

Exercice 34 — Contrôle qualité ( )

Un lot de 100 pièces contient 5 pièces défectueuses. On suppose que le tirage de 10 pièces se fait avec remise (modèle binomial avec $p = 0{,}05$). Soit X le nombre de pièces défectueuses.

a) Calculer $P(X = 0)$ (aucune pièce défectueuse).

b) Calculer $P(X \geqslant 1)$ (au moins une pièce défectueuse).

c) Calculer $E(X)$.

Exercice 35 — Lancer de pièce ( )

On lance une pièce équilibrée 8 fois. Soit X le nombre de « Face » obtenus.

a) Quelle loi suit X ?

b) Calculer $P(X = 5)$.

c) Calculer $P(X \geqslant 5)$.

Exercice 36 — Dénombrement avec contraintes ( )

On forme un mot de 5 caractères en utilisant les lettres A, B, C et les chiffres 1, 2, 3, 4 (sans répétition).

a) Combien de mots différents peut-on former ?

b) Combien commencent par une lettre ?

c) Combien contiennent exactement 2 chiffres ?

Exercice 37 — Tournoi à élimination directe ( )

Un tournoi de tennis à élimination directe regroupe 16 joueurs.

a) Combien de matchs sont joués au total ?

b) Combien de façons peut-on former les paires du premier tour (si les matchs sont non ordonnés et les paires sont disjointes) ?

c) Combien de classements finaux différents (1^{er}, 2^{e}, 3^{e}) peut-on obtenir ?

Exercice 38 — Combinatoire et probabilité ( )

Un sac contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire 3 boules simultanément.

a) Calculer le nombre total de tirages possibles.

b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges.

c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 1 boule rouge.

Exercice 39 — Démonstration : $\sum \binom{n}{k} = 2^n$ ( )

a) Rappeler le théorème du binôme.

b) En déduire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

c) Vérifier pour $n = 4$.

d) En appliquant le théorème du binôme pour $x = 1$ et $x = -1$, montrer aussi que $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Exercice 40 — Problème complet type Bac ( )

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet, et on recommence. On effectue 15 tirages. Soit X le nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelle loi suit X ? Préciser les paramètres.

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

c) Calculer $P(X = 5)$.

d) Calculer $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ (utiliser la calculatrice).

e) Interpréter $E(X)$ dans le contexte du problème.

Site du cours

Corrigés des exercices

utspe.com