Primitives et équations différentielles

Fiche d'exercices — Terminale Spécialité Mathématiques

40 exercices progressifs — Primitives usuelles, composées, équations diff.

Rappel de cours

Primitives usuelles : $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (si $n \neq -1$), $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

Primitives composées ($u' > 0$ ou signe adapté) : $\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \dfrac{u'}{u} = \ln|u| + C$, $\int u'e^u = e^u + C$, $\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

Éq. diff. $y' = ay$: solutions $y = ke^{ax}$. **Éq. diff. $y' = ay + b$:** solution particulière $y_0 = -\dfrac{b}{a}$, solution générale $y = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

I — Primitives usuelles

Exercice 1 — Primitives de fonctions polynomiales

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2$
b) $g(x) = 5x^4 - 2x$
c) $h(x) = 7$
d) $k(x) = x^{-3}$
e) $p(x) = \sqrt{x}$
f) $q(x) = x^{2/3}$

Exercice 2 — Primitives exponentielles

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = e^x$
b) $g(x) = 3e^x + 2$
c) $h(x) = e^x - x$

Exercice 3 — Primitives trigonométriques

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = \cos x + \sin x$
b) $g(x) = 2\cos x - 3\sin x$
c) $h(x) = 1 + \cos(x)$

Exercice 4 — Primitive de $1/x$

Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis sur $]-\infty; 0[$.

Exercice 5 — Primitives mixtes

Trouver une primitive de $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x} + \cos x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 — Condition initiale

Trouver la primitive F de $f(x) = 2x - 3$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 7 — Condition initiale (2)

Trouver la fonction F primitive de $f(x) = e^x + \cos x$ telle que $F(0) = 2$.

II — Primitives de fonctions composées

Exercice 8 — Forme $u'u^n$

Reconnaître et calculer les primitives suivantes :

a) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)^4$

b) $g(x) = 3x^2(x^3-1)^5$

c) $h(x) = \cos x \cdot \sin^3 x$

Exercice 9 — Forme u'/u

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

b) $g(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^3-x+4}$

c) $h(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$

Exercice 10 — Forme $u'e^u$

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = 2xe^{x^2}$

b) $g(x) = (3x^2+1)e^{x^3+x}$

c) $h(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

Exercice 11 — Forme $u'/\sqrt{u}$

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

b) $g(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$

Exercice 12 — Forme $u'e^{ax}$

Calculer une primitive de :

a) $f(x) = e^{3x}$ (poser $u = 3x$)

b) $g(x) = e^{-2x}$

c) $h(x) = 5e^{x/2}$

Exercice 13 — Identification de la forme

Pour chaque fonction, identifier la forme composée et calculer une primitive :

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

b) $g(x) = \sin x \cos^4 x$

c) $h(x) = (x-1)e^{x^2-2x+3}$

Exercice 14 — Primitive et condition initiale

Trouver F primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ avec $F(0) = 3$.

III — Équations différentielles $y' = ay$

Exercice 15 — Solutions générales

Donner la solution générale de :

a) $y' = 3y$ b) $y' = -2y$ c) $y' = \frac{1}{2}y$

Exercice 16 — Condition initiale

Résoudre :

a) $y' = 2y$, $y(0) = 5$

b) $y' = -y$, $y(0) = -3$

c) $y' = 4y$, $y(1) = e^4$

Exercice 17 — Vérification

Vérifier que $y(x) = 7e^{-3x}$ est solution de $y' = -3y$ et satisfait $y(0) = 7$.

Exercice 18 — Unicité

Montrer qu'il existe une unique solution à $y' = 5y$ avec $y(0) = k$ (pour $k \in \mathbb{R}$). Que se passe-t-il pour $k = 0$?

Exercice 19 — Application : radioactivité

La quantité $N(t)$ d'un isotope radioactif vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $\lambda > 0$.

a) Donner l'expression de $N(t)$ si $N(0) = N_0$.

b) Si la demi-vie est 10 ans, calculer λ.

c) Au bout de combien d'années reste-t-il $N_0/8$?

Exercice 20 — Application : intérêts continus

Un capital $C(t)$ est placé à un taux continu $r = 0{,}04$. On a $C' = rC$ et $C(0) = 1000$ €.

a) Donner $C(t)$.

b) Calculer le capital après 10 ans.

c) Au bout de combien d'années le capital double-t-il ?

IV — Équations différentielles $y' = ay + b$

Exercice 21 — Solution particulière constante

Pour chaque équation, trouver la solution particulière constante y_0 :

a) $y' = 2y + 6$

b) $y' = -3y + 9$

c) $y' = 5y - 10$

Exercice 22 — Solution générale

Donner la solution générale de :

a) $y' = 2y + 6$

b) $y' = -3y + 9$

c) $y' = y - 4$

Exercice 23 — Condition initiale

Résoudre le problème de Cauchy :

a) $y' = 2y - 4$, $y(0) = 3$

b) $y' = -y + 2$, $y(0) = 0$

c) $y' = 3y + 6$, $y(1) = 0$

Exercice 24 — Vérification

Vérifier que $y(x) = 3e^{-2x} + \dfrac{5}{2}$ est solution de $y' = -2y + 5$ avec $y(0) = \dfrac{11}{2}$.

Exercice 25 — Limite asymptotique

Soit $y' = ay + b$ avec $a < 0$.

a) Montrer que toute solution tend vers $-b/a$ quand $x \to +\infty$.

b) Application : pour $y' = -2y + 8$, $y(0) = 1$, trouver $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

Exercice 26 — Application : refroidissement

La température $T(t)$ d'un objet satisfait $T' = -k(T - T_\infty)$ avec $T_\infty = 20\,°\text{C}$ et $k = 0{,}1$.

a) Reformuler en équation $T' = aT + b$.

b) Résoudre avec $T(0) = 80$.

c) Calculer $T(10)$.

d) Au bout de combien de temps $T = 30\,°\text{C}$?

Exercice 27 — Application : population

La population $P(t)$ (en milliers) satisfait $P' = 0{,}02P - 0{,}4$ avec $P(0) = 25$.

a) Résoudre l'équation différentielle.

b) La population est-elle croissante ou décroissante ?

c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} P(t)$.

V — Exercices type Bac

Exercice 28 — Type Bac (primitives et intégrale)

1. Calculer une primitive de $f(x) = 2xe^{x^2-1}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2-1}\,dx$.
3. Calculer une primitive de $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$.

Exercice 29 — Type Bac (équation différentielle)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y - 6$.

1. Trouver la solution particulière constante y_0.
2. Donner la solution générale de (E).
3. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 4$.
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ pour cette solution.

Exercice 30 — Type Bac (problème de physique)

La charge $q(t)$ d'un condensateur vérifie $q'(t) = -\dfrac{1}{RC}q(t) + \dfrac{E}{R}$ avec $R = 1000\,\Omega$, $C = 10^{-3}\,\text{F}$, $E = 12\,\text{V}$ et $q(0) = 0$.

1. Écrire l'équation sous la forme $q' = aq + b$ en calculant a et b.
2. Résoudre l'équation différentielle.

3. Calculer $\lim_{t\to+\infty} q(t)$ et interpréter physiquement.
4. Calculer $q(1)$ (valeur numérique approchée).

Exercice 31 — Type Bac (médicament)

La concentration $c(t)$ (en mg/L) d'un médicament dans le sang vérifie $c' = -0{,}2c$, avec $c(0) = 50$.

1. Donner l'expression de $c(t)$.
2. Au bout de combien d'heures la concentration est-elle inférieure à 5 mg/L ?
3. Calculer $c'(0)$ et interpréter.
4. Tracer l'allure de $c(t)$.

Exercice 32 — Type Bac (intégrales composées)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x \, dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} \, dx$.

Exercice 33 — Type Bac (problème complet)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2e^x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée $y' + y = 0$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y = ae^x$.
3. Donner la solution générale de (E).
4. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.

Exercice 34 — Type Bac (modélisation)

La population d'une ville croît selon le modèle $P'(t) = kP(t)$ avec $P(0) = 100\,000$ habitants.

1. Donner l'expression de $P(t)$.
2. Si la population double en 30 ans, calculer k (donner la valeur exacte).
3. Quelle sera la population dans 50 ans ?
4. Après combien d'années la population aura-t-elle triplé ?

Exercice 35 — Type Bac (condition initiale et limite)

On considère $y' = -3y + 9$ avec $y(0) = y_0$.

1. Donner la solution générale.

2. Pour quelle valeur de y_0 la solution est-elle constante ?
3. Pour $y_0 = 5$, étudier la monotonie et calculer $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.
4. Pour $y_0 = 1$, même questions.

Exercice 36 — Type Bac (intégration par parties — admis)

En utilisant la méthode d'intégration par parties $\int uv'\,dx = [uv] - \int u'v\,dx$:

1. Calculer $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ (prendre $u = \ln x$, $v' = x$).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ (prendre $u = x$, $v' = e^x$).

Exercice 37 — Type Bac (résolution complète)

L'équation différentielle est $2y' - y = e^{x/2} + 1$.

1. Réécrire sous la forme $y' = ay + b(x)$.
2. Résoudre l'homogène $2y' - y = 0$.
3. Chercher une solution particulière de $2y' - y = e^{x/2}$ (forme $ae^{x/2}$) puis de $2y' - y = 1$ (forme constante c).
4. Donner la solution générale complète.
5. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 38 — Type Bac (vrai/faux justifié)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier :

1. « $F(x) = e^{2x}$ est une primitive de $f(x) = 2e^{2x}$. »
2. « Si F et G sont deux primitives de f, alors $F - G$ est une constante. »
3. « La solution de $y' = y$ avec $y(0) = 0$ est $y = 0$. »
4. « L'équation $y' = -y + 1$ admet une unique solution constante. »
5. « Toute solution de $y' = ay$ avec $a < 0$ tend vers 0. »

Exercice 39 — Type Bac (application chimique)

La concentration $C(t)$ d'une substance chimique satisfait $\dfrac{dC}{dt} = -kC + P$ où $k = 0{,}5$ et $P = 2$.

1. Écrire sous la forme $C' = aC + b$.
2. Résoudre avec $C(0) = 0$.
3. Calculer $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ (concentration d'équilibre).
4. En combien de temps la concentration atteint-elle 90 % de sa valeur d'équilibre ?

Exercice 40 — Type Bac (problème complet — 3 parties)

Partie A — Primitives.

A1. Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

A2. Calculer $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$.

Partie B — Équation différentielle.

B1. Résoudre $y' = 2y$ avec $y(0) = 3$.

B2. Résoudre $y' = 2y - 4$ avec $y(0) = 1$.

Partie C — Application.
La quantité $Q(t)$ d'un polluant (en tonnes) dans un lac satisfait $Q' = -0{,}1Q + 5$ avec $Q(0) = 100$.

C1. Résoudre cette équation différentielle.

C2. Calculer $\lim_{t\to+\infty} Q(t)$ et interpréter.

C3. Calculer $Q(10)$ (valeur approchée).