

Logarithme népérien

Fiche d'exercices — Terminale Spécialité Mathématiques
 40 exercices progressifs — Propriétés, équations, limites, étude de fonctions

Rappel de cours

Domaine : \ln est défini sur $]0; +\infty[$. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

Propriétés : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Dérivée : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (si $u > 0$).

Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Lien avec exp : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$.

I — Propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1 — Simplifications

Simplifier les expressions suivantes (sans calculatrice) :

$$A = \ln(e^3), \quad B = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right), \quad C = e^{\ln 5}, \quad D = \ln(\sqrt{e}).$$

Exercice 2 — Combinaisons de logarithmes

Écrire sous la forme $a \ln 2 + b \ln 3$ (avec $a, b \in \mathbb{Q}$) :

$$A = \ln 6, \quad B = \ln\left(\frac{4}{3}\right), \quad C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right), \quad D = \ln(12).$$

Exercice 3 — Développement et factorisation

Développer : $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3}\right)$ pour $x > 1$.

Puis factoriser : $3 \ln x - \ln x^2 + \ln(1/x)$.

Exercice 4 — Comparaison

Sans calculatrice, comparer à 1 puis entre eux (du plus petit au plus grand) :

$$\ln 2, \quad \ln \frac{3}{2}, \quad \ln(e^2), \quad \ln 1.$$

Exercice 5 — Propriétés

Montrer que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$.

En déduire que $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

Exercice 6 — Valeur exacte

Calculer les valeurs exactes (sous forme de combinaison de \ln et de rationnels) : $\ln(\sqrt[3]{e^2})$, $\ln(e^{-3})$, $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

**II — Équations et inéquations****Exercice 7 — Équations simples**

Résoudre dans \mathbb{R} (ou dans $]0; +\infty[$) :

a) $\ln x = 3$

c) $\ln(2x - 1) = 0$

b) $\ln x = -1$

d) $e^x = 5$

**Exercice 8 — Équations avec propriétés**

Résoudre :

a) $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln(3)$

b) $\ln(x^2 - 3x + 2) = 0$

c) $2 \ln x - \ln(x + 1) = \ln 4$

**Exercice 9 — Équations mêlant \ln et \exp**

Résoudre :

a) $\ln(e^{2x} + 1) = \ln(3)$ (poser $u = e^x$)

b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (poser $u = e^x$)

**Exercice 10 — Inéquations (1)**

Résoudre dans $]0; +\infty[$:

a) $\ln x > 2$

b) $\ln x \leq -1$

c) $\ln(x - 1) < \ln(3)$

**Exercice 11 — Inéquations (2)**

Résoudre :

a) $\ln x + \ln(x - 1) > 0$

b) $2 \ln x \leq \ln(x + 2)$

**Exercice 12 — Équations transcendantes**

Résoudre $x \ln x = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Puis résoudre $\ln x = x - 1$ (montrer graphiquement qu'il y a une seule solution et la trouver).



III — Limites et croissances comparées

Exercice 13 — Limites en $+\infty$

Calculer les limites :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^3 + 1)$

Exercice 14 — Limites en 0^+

Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1}$

Exercice 15 — Formes indéterminées

Lever les indéterminations :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln x)$

Exercice 16 — Limite en 1

Étudier la limite de $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$ quand $x \rightarrow 1$ (utiliser le taux d'accroissement de \ln en $x = 1$).

IV — Dérivée et étude de fonctions

Exercice 17 — Dérivées usuelles

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(3x + 1)$

c) $h(x) = x \ln x$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 4)$

d) $k(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 18 — Dérivées composées

Dériver :

a) $f(x) = (\ln x)^3$

b) $g(x) = \sqrt{\ln x} \quad (x > 1)$

c) $h(x) = \ln(\ln x) \quad (x > 1)$

Exercice 19 — Tableau de variations

Étudier les variations et dresser le tableau de variations de $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
Donner le minimum et l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 20 — Étude complète (1)

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe.

Exercice 21 — Tangente

Donner l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f , où $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 22 — Convexité

Étudier la convexité de $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$ (calculer f'' et conclure).

Exercice 23 — Étude complète (2)

Soit $g(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$ définie sur $] -1; +\infty[$.

- Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- Dresser le tableau de variations de g .
- Quelle est la tangente en $x = 0$?

V — Exercices type Bac**Exercice 24 — Type Bac (étude de fonction)**

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Exercice 25 — Type Bac (équation)

Résoudre dans \mathbb{R} le système :

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ \ln(x + y) = \ln 2 \end{cases}$$

Exercice 26 — Type Bac (inégalité)



1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (Étudier $g(x) = x - 1 - \ln x$.)
2. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Exercice 27 — Type Bac (suite et ln)



On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2 .
2. Montrer que si $u_n > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$.
3. Montrer que la suite est croissante et non majorée (admettre que $\ln u \rightarrow +\infty$).

Exercice 28 — Type Bac (croissance comparée)



On pose $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f est croissante puis décroissante. Donner le maximum.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Exercice 29 — Type Bac (problème complet)



On pose $f(x) = x \ln x - x + 1$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Quand y a-t-il égalité ?
4. Donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $x = 1$.

Exercice 30 — Type Bac (intégrale et ln)



1. Calculer $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.
2. Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (poser $u = \ln x$).
3. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$.

Exercice 31 — Type Bac (domaine et variations)



Soit $h(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de h .

- Calculer $h'(x)$ et montrer que h est strictement décroissante sur chaque intervalle du domaine.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$.


Exercice 32 — Type Bac (application réelle)


Le nombre de bactéries dans une culture évolue selon $N(t) = N_0 e^{kt}$ où t est en heures.

- À $t = 0$, $N(0) = 500$. Trouver N_0 .
- À $t = 3$, $N(3) = 4000$. Montrer que $k = \frac{\ln 8}{3}$.
- Au bout de combien d'heures la population atteindra-t-elle 1 000 000 ?
- Calculer $N'(t)$ et interpréter.

Exercice 33 — Type Bac (deux fonctions)


On compare $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
- Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- En déduire une inégalité entre $\ln(x+1)$ et $\frac{x}{x+1}$.

Exercice 34 — Type Bac (problème complet, 3 parties)


Partie A — Montrer que l'équation $\ln x = 2 - x$ admet une unique solution α dans $]1; e[$. Donner un encadrement de α à 0,1 près.

Partie B — Soit $f(x) = \ln x + x - 2$.

- Calculer $f'(x)$.
- Montrer que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- En déduire que α est l'unique zéro de f .

Partie C — Donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse α .

Exercice 35 — Type Bac (récapitulatif)


Soit $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations et donner le maximum de f .
- Équation de la tangente en $x = e$.
- Calculer $\int_1^e f(x) dx$ (primitive par parties).

Exercice 36 — Type Bac (optimisation)



Une entreprise modélise son coût $C(x) = x^2 \ln x$ (en milliers d'euros) en fonction de la quantité $x > 0$ produite.

1. Calculer $C'(x)$.
2. Pour quelle valeur de x le coût marginal $C'(x)$ est-il nul ?
3. Étudier le signe de $C'(x)$ et dresser le tableau de variations.
4. Interpréter le minimum trouvé dans le contexte économique.

Exercice 37 — Type Bac (composition)



Soit $g(x) = e^{f(x)}$ avec $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f et de g .
4. Donner le maximum de g .

Exercice 38 — Type Bac (suite définie par ln)



On pose $v_n = \ln(n!)$ pour $n \geq 1$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 .
2. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \ln(n + 1)$.
3. Montrer que $v_n = \sum_{k=1}^n \ln k$.
4. Montrer que $v_n \geq n \ln n - n \ln e = n \ln(n/e)$. (Utiliser $\ln k \geq \ln(n/2)$ pour $k \geq n/2$.)

Exercice 39 — Type Bac (étude globale)



Soit $\varphi(x) = (2x - 1) \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $\varphi'(x)$.
2. Montrer que φ admet un minimum en $x = 1/2$. Calculer $\varphi(1/2)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
4. Dresser le tableau de variations complet.

Exercice 40 — Type Bac (problème complet)



On pose $f(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que f est minimale en $x = 1$, avec $f(1) = 0$.
2. En déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
3. En substituant $x \leftarrow 1/x$, montrer que $\ln x \geq 1 - 1/x$.

4. En déduire l'encadrement $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$.

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ à l'aide de cet encadrement.

