Loi binomiale

Fiche d'exercices — Terminale Spécialité Mathématiques

40 exercices progressifs — Dénombrement, probabilités, loi $\mathcal{B}(n,p)$

Rappel de cours

Factorielle : $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$, avec $0! = 1$. **Coefficients binomiaux :** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Espérance : $E(X) = np$ **Variance :** $V(X) = np(1-p)$ **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

I — Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 1 — Calculs de factorielles

Calculer sans calculatrice : $3!$, $5!$, $7!$, $\dfrac{8!}{6!}$, $\dfrac{10!}{8!\cdot 2!}$.

Exercice 2 — Coefficients binomiaux

Calculer : $\binom{5}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{0}$, $\binom{6}{6}$, $\binom{8}{5}$.

Exercice 3 — Propriétés des coefficients

a) Vérifier que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $n=7$, $k=3$.

b) Vérifier la relation de Pascal : $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ pour $n=6$, $k=2$.

Exercice 4 — Triangle de Pascal

Compléter les lignes $n=0$ à $n=6$ du triangle de Pascal. En déduire la valeur de $\binom{6}{3}$.

Exercice 5 — Arrangements et combinaisons

Un club de 12 membres doit élire un président et un trésorier (deux postes distincts).

a) Combien de choix possibles y a-t-il ?

b) Si maintenant on constitue un bureau de 3 membres sans distinction de rôle, combien de bureaux différents peut-on former ?

Exercice 6 — Équation avec binôme

Résoudre l'équation $\binom{n}{2} = 21$.

Exercice 7 — Dénombrement d'anagrammes

Combien de mots (avec ou sans sens) peut-on former avec les lettres du mot CALCUL ? (Attention aux répétitions.)

Exercice 8 — Chemins

Dans une grille 4×3, on se déplace uniquement vers la droite ou vers le haut. Combien de chemins différents mènent du coin inférieur gauche au coin supérieur droit ?

II — Épreuve de Bernoulli et loi binomiale

Exercice 9 — Épreuve de Bernoulli

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès comme « obtenir un 6 ».

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X associée à une épreuve ?

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 10 — Modélisation binomiale

On répète 8 fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}3$. Soit X le nombre de succès.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 11 — Calcul de P(X=k)

$X \sim \mathcal{B}(5,\ 0{,}4)$. Calculer :

a) $P(X = 2)$ b) $P(X = 0)$ c) $P(X = 5)$

Exercice 12 — Calcul de probabilités cumulées

$X \sim \mathcal{B}(6,\ 0{,}5)$. Calculer $P(X \leqslant 2)$ (sans calculatrice).

Exercice 13 — Complémentaire

$X \sim \mathcal{B}(10,\ 0{,}2)$. Calculer $P(X \geqslant 1)$ à l'aide du complémentaire.

Exercice 14 — Espérance et variance

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $E(X) = 6$ et $V(X) = 4{,}2$.

a) Déterminer n et p.

b) Calculer $P(X = 7)$.

Exercice 15 — Justification du modèle

On tire successivement et avec remise 5 boules d'une urne contenant 3 rouges et 7 noires. Soit X le nombre de boules rouges tirées.

a) Justifier que $X \sim \mathcal{B}(5,\ 0{,}3)$.

b) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X \geqslant 3)$.

Exercice 16 — Seuil de probabilité

$X \sim \mathcal{B}(20,\ 0{,}1)$. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$. Quelle est la valeur la plus probable ?

III — Calculs et raisonnements sur la loi $\mathcal{B}(n, p)$

Exercice 17 — Intervalle de fluctuation

$X \sim \mathcal{B}(100,\ 0{,}4)$.

a) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

b) Déterminer l'intervalle $[E(X) - 2\sigma(X)\,;\, E(X) + 2\sigma(X)]$.

Exercice 18 — Probabilité maximale

$X \sim \mathcal{B}(5,\ 0{,}6)$. Dresser le tableau de $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Pour quelle valeur de k la probabilité est-elle maximale ?

Exercice 19 — Au moins / au plus

Une pièce est truquée : $P(\text{pile}) = 0{,}6$. On la lance 7 fois. Soit X le nombre de piles.

a) Calculer $P(X \geqslant 5)$.

b) Calculer $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

Exercice 20 — Taux de défaut

Dans une usine, 5 % des pièces sont défectueuses. On contrôle un lot de 20 pièces.

a) Modéliser la situation par une loi binomiale.

b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 pièces défectueuses.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce défectueuse.

Exercice 21 — Lancer de dé

On lance un dé 12 fois et on note X le nombre de fois qu'on obtient un multiple de 3.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Calculer $E(X)$ et $P(X = 4)$.

Exercice 22 — Tirages avec remise

Une urne contient 4 boules rouges, 3 bleues et 3 vertes. On effectue 10 tirages avec remise. Soit Y le nombre de boules rouges obtenues.

a) Donner la loi de Y.

b) Calculer $P(Y \leqslant 3)$.

Exercice 23 — Médiane

$X \sim \mathcal{B}(10,\ 0{,}5)$. Calculer $P(X \leqslant 5)$ et vérifier que la médiane est $m = 5$.

Exercice 24 — Inégalité binomiale

Montrer que pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, on a $P(X=k+1) = P(X=k) \times \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$.
Application : calculer $P(X=3)$ à partir de $P(X=2)$ pour $X \sim \mathcal{B}(8,\ 0{,}3)$.

IV — Problèmes et exercices de synthèse

Exercice 25 — Médicament

Un médicament guérit 80 % des patients. On traite 15 patients.

a) Calculer la probabilité que tous les patients soient guéris.

b) Calculer $P(X \geqslant 12)$ où X est le nombre de guérisons.

c) Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de guérisons.

Exercice 26 — Concours

Un candidat répond au hasard à un QCM de 20 questions, chacune ayant 4 propositions dont une seule est correcte.

a) Calculer la probabilité d'avoir exactement 5 bonnes réponses.

b) Calculer la probabilité d'en avoir au moins 5.

c) Quelle est l'espérance du nombre de bonnes réponses ?

Exercice 27 — Assurance

Une compagnie d'assurance estime que 2 % de ses assurés auront un accident dans l'année. Elle a 200 assurés.

a) Modéliser le nombre d'accidents X.

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 5 accidents.

Exercice 28 — Contrôle qualité

Un lot de 500 produits contient 10 % de défectueux. On prélève 15 produits avec remise.

a) Déterminer la loi du nombre X de produits défectueux.

b) Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X \leqslant 2)$.

c) Quel est le nombre espéré de défectueux ?

Exercice 29 — Stratégie de jeu

Alice et Bob jouent à pile ou face. Alice gagne si on obtient pile ($p = 0{,}5$). Ils jouent 9 parties.

a) Calculer $P(\text{Alice gagne exactement 5 parties})$.

b) Calculer $P(\text{Alice gagne la majorité des parties})$, c'est-à-dire $P(X \geqslant 5)$.

Exercice 30 — Détermination de n

On répète n fois une épreuve de Bernoulli avec $p = 0{,}3$. On veut que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$. Trouver le plus petit entier n satisfaisant cette condition.

V — Exercices type Bac

Exercice 31 — Type Bac (production)

Une machine produit des pièces dont 3 % sont défectueuses. On prélève un échantillon de 25 pièces.

1. Justifier que $X \sim \mathcal{B}(25,\ 0{,}03)$.
2. Calculer $P(X = 0)$ (donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3}).
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 32 — Type Bac (sondage)

Un sondage indique que 65 % des lycéens aiment les mathématiques. On interroge 20 lycéens au hasard. Soit X le nombre de lycéens qui aiment les maths.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $P(X = 13)$.
3. Calculer $P(X \geqslant 15)$.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 33 — Type Bac (jeu de hasard)

On lance un dé à 6 faces équilibré 10 fois. On s'intéresse à l'événement « obtenir un 5 ou un 6 ».

1. Modéliser le nombre de succès X par une loi binomiale.
2. Calculer $P(X = 3)$.
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 34 — Type Bac (complémentaire)

Dans une ville, 40 % des habitants utilisent les transports en commun chaque jour. On interroge 15 habitants.

1. Calculer $P(X = 6)$.
2. Calculer $P(X = 0)$ et interpréter.
3. Calculer $P(X \geqslant 1)$ à l'aide du complémentaire.
4. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 35 — Type Bac (détermination de paramètres)

X suit une loi binomiale telle que $E(X) = 4$ et $V(X) = 3$.

1. Déterminer n et p.
2. Calculer $P(X = 3)$.
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$.

Exercice 36 — Type Bac (intervalle de fluctuation)

On considère une proportion $p = 0{,}6$ dans une population. On réalise des sondages de taille $n = 50$.

1. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour $X \sim \mathcal{B}(50,\ 0{,}6)$.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % (on rappelle qu'il vaut $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$).
3. Si dans un sondage on obtient 35 « oui », la proportion observée est-elle compatible avec $p = 0{,}6$?

Exercice 37 — Type Bac (problème complet)

Un joueur tire des flèches sur une cible. La probabilité d'atteindre le centre est $p = 0{,}25$. Il tire 12 flèches.

1. Montrer que $X \sim \mathcal{B}(12,\ 0{,}25)$.
2. Calculer $P(X = 3)$ (valeur exacte et approchée).
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
4. Calculer $P(X \geqslant 4)$ à l'aide du complémentaire de $P(X \leqslant 3)$.
5. Calculer $E(X)$ et interpréter dans le contexte.

Exercice 38 — Type Bac (loi et simulation)

Un site de e-commerce reçoit en moyenne 30 % de commandes annulées. Sur 20 commandes :

1. Donner la loi de X, le nombre d'annulations.
2. Calculer $P(X = 5)$.
3. Calculer $P(X \leqslant 3)$.
4. On dit que la journée est « mauvaise » si $X \geqslant 8$. Calculer $P(X \geqslant 8)$.

Exercice 39 — Type Bac (seuil)

Un médicament a 70 % de chances de guérir un patient. On traite n patients. On veut que la probabilité qu'au moins 1 patient soit guéri soit supérieure à 0,99.

1. Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de n.
2. Montrer que la condition revient à $0{,}3^n < 0{,}01$.

3. Trouver le plus petit entier n satisfaisant cette inégalité (utiliser ln).

Exercice 40 — Type Bac (problème complet, 2 parties)

Partie A — Modélisation
Un test de dépistage donne un résultat positif dans 98 % des cas quand la personne est malade, et dans 5 % des cas quand la personne est saine. La prévalence de la maladie est 1 %.

1. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif.

Partie B — Loi binomiale
On réalise ce test sur 200 personnes saines.

3. Modéliser le nombre Y de faux positifs par une loi binomiale.
4. Calculer $E(Y)$ et $P(Y \leqslant 5)$.