

# Orthogonalité dans l'espace

Fiche d'exercices — Terminale Spécialité Mathématiques  
40 exercices progressifs — Produit scalaire, plans, distances

## Rappel de cours

**Produit scalaire dans l'espace** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$     **Norme** :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Vecteur normal** à un plan  $ax + by + cz + d = 0$  :  $\vec{n} = (a, b, c)$

**Distance point-plan** :  $d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**Orthogonalité** :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

## I — Produit scalaire et calculs de base

### Exercice 1 — Produit scalaire en coordonnées



On pose  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  et  $\vec{v} = (4, 5, -2)$ .

- Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Calculer  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ .
- Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

### Exercice 2 — Produit scalaire



Soit  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$  et  $\vec{b} = (2, 1, -3)$ .

- Calculer  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
- Montrer que  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas orthogonaux.
- Déterminer  $k$  tel que  $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$  soit orthogonal à  $\vec{b}$ .

### Exercice 3 — Norme



Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants :  $\vec{u} = (1, 2, 2)$ ,  $\vec{v} = (3, -4, 0)$ ,  $\vec{w} = (-1, -1, \sqrt{2})$ .

### Exercice 4 — Orthogonalité de vecteurs



Parmi les paires suivantes, lesquelles sont orthogonales ?

- $\vec{u} = (1, 2, -3)$  et  $\vec{v} = (3, 0, 1)$
- $\vec{u} = (2, -1, 4)$  et  $\vec{v} = (2, 8, \frac{1}{2})$
- $\vec{u} = (0, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 1, 0)$

### Exercice 5 — Valeur inconnue



Déterminer  $\lambda$  pour que  $\vec{u} = (3, \lambda, -1)$  et  $\vec{v} = (2, 3, 6)$  soient orthogonaux.

### Exercice 6 — Distance entre deux points



Calculer la distance  $AB$  avec  $A = (1, 3, -2)$  et  $B = (4, -1, 2)$ .

**Exercice 7 — Produit scalaire géométrique**

Dans un repère orthonormé, on donne  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (2, 1, -1)$ ,  $C = (1, 3, 2)$ .

- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- L'angle  $\widehat{BAC}$  est-il aigu, droit ou obtus ?

**Exercice 8 — Combinaison de vecteurs**

On pose  $\vec{u} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{w} = (1, 2, 0)$ . Calculer  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ .

**II — Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan****Exercice 9 — Équation d'un plan**

Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A = (1, 2, 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n} = (2, -1, 4)$ .

**Exercice 10 — Vecteur normal**

Identifier un vecteur normal au plan d'équation  $3x - y + 2z - 7 = 0$ .

**Exercice 11 — Plan passant par trois points**

Trouver une équation cartésienne du plan passant par  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  et  $C = (0, 0, 1)$ .

**Exercice 12 — Plan parallèle**

Donner l'équation d'un plan parallèle au plan  $2x + y - 3z + 1 = 0$  et passant par  $P = (0, 1, -1)$ .

**Exercice 13 — Appartenance d'un point**

Le point  $M = (3, -1, 2)$  appartient-il au plan  $\mathcal{P} : x - 2y + z - 7 = 0$  ?

**Exercice 14 — Plans perpendiculaires**

Montrer que les plans  $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z = 0$  ne sont pas perpendiculaires. Quel est leur produit scalaire de normales ?

**Exercice 15 — Équation depuis deux vecteurs directeurs**

Soit le plan contenant  $A = (1, 1, 1)$  et engendré par  $\vec{u} = (1, 2, -1)$  et  $\vec{v} = (3, 0, 1)$ . Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

**Exercice 16 — Plans parallèles ou sécants**

Les plans  $\mathcal{P}_1 : 2x - 4y + 6z - 5 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : x - 2y + 3z + 1 = 0$  sont-ils parallèles, confondus ou sécants ? Justifier.

**III — Distance point-plan et point-droite**

**Exercice 17 — Distance point-plan (1)**

Calculer la distance du point  $A = (1, 2, -1)$  au plan  $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$ .

**Exercice 18 — Distance point-plan (2)**

Calculer  $d(B, \mathcal{P})$  avec  $B = (0, 0, 0)$  et  $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$ .

**Exercice 19 — Distance point-plan (3)**

Calculer la distance du point  $C = (-1, 3, 2)$  au plan  $3x + 4z - 1 = 0$ .

**Exercice 20 — Pied de la perpendiculaire**

Soit  $A = (3, 0, -1)$  et  $\mathcal{P} : x - y + z + 2 = 0$ .

- Écrire les équations paramétriques de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .
- Déterminer les coordonnées du pied  $H$  de la perpendiculaire.
- En déduire  $d(A, \mathcal{P})$ .

**Exercice 21 — Distance entre plans parallèles**

Calculer la distance entre les plans  $\mathcal{P}_1 : 3x - y + 2z - 4 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : 3x - y + 2z + 8 = 0$ .

**Exercice 22 — Distance point-droite**

La droite  $\Delta$  est paramétrée par  $(1 + t, 2 - t, 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Calculer la distance du point  $M = (2, 3, -1)$  à  $\Delta$ .

*Indication : trouver le paramètre  $t_0$  tel que  $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$  où  $P$  est le point de  $\Delta$  associé à  $t_0$ .*

**Exercice 23 — Projection orthogonale**

Soit  $M = (4, 1, 2)$  et le plan  $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + 1 = 0$ .

- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ .
- Calculer  $MH$ .

**Exercice 24 — Angle droite-plan**

La droite  $\Delta$  a pour vecteur directeur  $\vec{u} = (1, -1, 1)$  et le plan  $\mathcal{P}$  a pour vecteur normal  $\vec{n} = (2, 0, -1)$ .

- Calculer  $|\vec{u} \cdot \vec{n}|$ .
- Cette droite est-elle parallèle, perpendiculaire ou quelconque par rapport à  $\mathcal{P}$  ?

**IV — Droites et plans dans l'espace****Exercice 25 — Droite perpendiculaire à un plan**

Montrer que la droite  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u} = (1, -2, 3)$  est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P} : x - 2y + 3z - 5 = 0$ .



**Exercice 26 — Intersection droite-plan**

La droite  $\Delta$  est définie par  $(x, y, z) = (2 - t, 1 + 2t, t)$ . Déterminer le point d'intersection de  $\Delta$  avec le plan  $\mathcal{P} : 2x + y - z = 3$ .

**Exercice 27 — Plan perpendiculaire à une droite**

Écrire l'équation du plan passant par  $A = (1, 2, 0)$  et perpendiculaire à la droite  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u} = (3, -1, 2)$ .

**Exercice 28 — Droite contenue dans un plan**

Vérifier que la droite  $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 - t, 3t)$  est entièrement contenue dans le plan  $x + 2y - z = 5$ . En déduire un vecteur directeur de la droite.

**Exercice 29 — Plans sécants**

Déterminer la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 1$  et  $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 3$ .

**Exercice 30 — Tétraèdre**

Dans le repère orthonormé, on considère le tétraèdre  $OABC$  avec  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 3, 0)$ ,  $C = (0, 0, 4)$ .

- Donner l'équation du plan  $ABC$ .
- Calculer la distance de  $O$  au plan  $ABC$ .

**V — Exercices de synthèse et type Bac****Exercice 31 — Synthèse géométrie**

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne :  $A = (2, 1, -1)$ ,  $B = (1, 3, 0)$ ,  $C = (0, 2, 1)$ .

- Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .
- Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  ne sont pas perpendiculaires.
- Déterminer une équation du plan  $(ABC)$ .

**Exercice 32 — Orthogonalité et coordonnées**

Soit  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (3, 0, 1)$ ,  $C = (-1, 4, 3)$ .

- Calculer  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
- Montrer que  $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

**Exercice 33 — Plan et distance**

Le plan  $\mathcal{P}$  passe par  $A = (1, -1, 2)$ ,  $B = (3, 0, 1)$ ,  $C = (2, 2, -1)$ .

- Trouver un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  en calculant un produit vectoriel (méthode :  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ , ou par système).

- b) Donner l'équation de  $\mathcal{P}$ .
- c) Calculer la distance du point  $D = (0, 0, 0)$  au plan  $\mathcal{P}$ .



### Exercice 34 — Sphère et plan

La sphère  $\mathcal{S}$  est de centre  $\Omega = (1, 2, -1)$  et de rayon  $r = 3$ .

- a) Écrire l'équation de  $\mathcal{S}$ .
- b) Calculer la distance de  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P} : x - 2y + 2z + 5 = 0$ .
- c) Le plan  $\mathcal{P}$  coupe-t-il la sphère ? Si oui, est-ce un grand ou petit cercle ?



### Exercice 35 — Projeté orthogonal

Soit la droite  $\Delta$  passant par  $A = (0, 0, 1)$  avec vecteur directeur  $\vec{u} = (1, 2, -1)$ , et le point  $B = (2, -1, 3)$ .

- a) Paramétrer la droite  $\Delta$ .
- b) Trouver le projeté orthogonal  $H$  de  $B$  sur  $\Delta$ .
- c) Calculer  $BH$ .



### Exercice 36 — Type Bac (d'après Bac 2023)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les points  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (3, -1, 2)$  et  $C = (2, 1, -1)$ , et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x - y + z - 5 = 0$ .

- Vérifier que le vecteur  $\vec{n} = (2, -1, 1)$  est normal à  $\mathcal{P}$ .
- Montrer que  $A$  appartient à  $\mathcal{P}$ .
- Calculer  $d(B, \mathcal{P})$ .
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $B$  sur  $\mathcal{P}$ .
- Calculer  $BH$  et comparer au résultat précédent.



### Exercice 37 — Type Bac (positions relatives)

Dans le repère orthonormé, on considère les plans :  $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z - 1 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 : 2x + y + z - 3 = 0$ .

- Montrer que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas parallèles.
- Déterminer un vecteur directeur de leur droite d'intersection  $\Delta$ .
- Trouver un point de  $\Delta$  (en posant  $z = 0$ ).
- Vérifier que le point trouvé appartient aux deux plans.



### Exercice 38 — Type Bac (distance et sphère)

La sphère  $\mathcal{S}$  a pour centre  $\Omega = (2, 0, -1)$  et rayon  $R = \sqrt{14}$ .

- Donner l'équation de  $\mathcal{S}$ .



2. Le point  $A = (1, -2, 2)$  est-il intérieur, sur, ou extérieur à  $\mathcal{S}$  ?
3. Calculer la distance de  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 1 = 0$ .
4. Le plan  $\mathcal{P}$  est-il sécant à  $\mathcal{S}$  ? Si oui, déterminer le rayon du cercle d'intersection.

**Exercice 39 — Type Bac (repère, plans, distances)**

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$A = (1, 1, 0), \quad B = (2, 0, 1), \quad C = (0, 2, 1), \quad D = (1, 1, 3)$$

1. Calculer  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
3. Montrer que  $D$  n'appartient pas à  $(ABC)$ .
4. Calculer la distance de  $D$  au plan  $(ABC)$ .

**Exercice 40 — Type Bac (problème complet)**

Dans un repère orthonormé, on considère le plan  $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 1 = 0$  et les points  $A = (2, 1, -1)$  et  $B = (4, -1, 3)$ .

1. Vérifier que  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}$ .
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .
3. Calculer  $d(A, \mathcal{P})$  par la formule, et vérifier avec  $AH$ .
4. Calculer la distance de  $B$  à  $\mathcal{P}$ .
5. Montrer que  $A$  et  $B$  sont du même côté de  $\mathcal{P}$  (même signe de  $2x - y + 2z - 1$ ).