Terminale Spécialité Mathématiques

Chapitre 6 : Continuité

40 exercices — Continuité, TVI, point fixe, suites récurrentes

---

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques

Thèmes : Continuité, prolongement, TVI, dichotomie, suites récurrentes, point fixe

Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU

Site : `utspe.com`

utspe.com

Rappel de cours

- f **continue en** $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- **TVI :** f continue sur $[a;b]$, k entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow \exists\, c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$
- **Corollaire :** si f est de plus strictement monotone, c est unique
- **Point fixe :** si (u_n) converge vers ℓ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $f(\ell) = \ell$

Partie A — Continuité en un point

Exercice 1 — Continuité en un point

Étudier la continuité de chaque fonction en a.

a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ en $a = 2$

b. $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ pour $x \neq 2$, $g(2) = 4$, en $a = 2$

c. $h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$ en $a = 1$

d. $k(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$ $\quad$ (*admettre que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

Exercice 2 — Prolongement par continuité

Pour chaque fonction, vérifier qu'elle est prolongeable par continuité en a, puis donner $\tilde{f}(a)$.

a. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ en $a = 3$

b. $g(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$ en $a = 0$

c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ en $a = 0$

d. $k(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en $a = 0$

e. $p(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ en $a = 0$

Exercice 3 — Continuité de fonctions composées

Justifier la continuité de chaque fonction sur le domaine indiqué.

a. $f(x) = e^{\sin x}$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

d. $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 — Déterminer le paramètre pour assurer la continuité

a. Déterminer a pour que $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 1 \\ x^2 + 3 & x \geqslant 1 \end{cases}$ soit continue en $x = 1$.

b. Déterminer b pour que $g(x) = \begin{cases} bx^2 & x \leqslant 2 \\ 3x - 1 & x > 2 \end{cases}$ soit continue en $x = 2$.

c. Déterminer a et b pour que $h(x) = \begin{cases} x^2 + a & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \cos x + 2 & x > 0 \end{cases}$ soit continue en $x = 0$.

Exercice 5 — Continuité sur un intervalle

a. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ est continue sur $]-2; 2[$.

b. Montrer que $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1; 1]$.

c. La fonction $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$ est-elle continue en 0 ? Justifier.

Partie B — Théorème des valeurs intermédiaires

Rappel de cours

Si f est continue sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $]a; b[$.

Exercice 6 — Application directe du TVI

a. Montrer que $f(x) = x^3 - 2x - 5$ s'annule sur $[2; 3]$.

b. Montrer que $g(x) = e^x - 3x$ admet une solution sur $[0; 1]$.

c. Montrer que $h(x) = \cos x - x$ admet une solution sur $[0; \pi/2]$.

d. Montrer que $k(x) = \ln x - 2 + x$ s'annule sur $[1; 2]$.

Exercice 7 — TVI avec valeur intermédiaire

a. Soit $f(x) = x^4 + x - 3$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.

b. Soit $g(x) = 2 \sin x - x$. Montrer que g s'annule sur $]0; \pi[$.

c. Soit $h(x) = x^2 - 2$. Montrer qu'il existe $c \in [1; 2]$ tel que $h(c) = 0$, puis encadrer $\sqrt{2}$ à 0,5 près.

Exercice 8 — Unicité par monotonie stricte

Montrer que chaque équation admet une unique solution sur l'intervalle donné, puis encadrer cette solution.

a. $x^3 + x = 10$ sur $[0; 3]$

b. $e^x = 3$ sur $[0; 2]$

c. $\ln x + x = 2$ sur $[1; 3]$

Exercice 9 — Encadrement par dichotomie

Soit $f(x) = x^3 - x - 1$.

1. Vérifier que $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$. En déduire qu'il existe $\alpha \in [1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Calculer $f(1{,}5)$. Dans quel demi-intervalle se trouve α ?

3. Calculer $f(1{,}25)$, puis $f(1{,}375)$. Encadrer α à 0,1 près.

4. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 10 — TVI et équation paramétrique

Soit $f(x) = x^2 + x - 1$ sur $[0; 1]$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

2. Pour quelle valeur de k l'équation $f(x) = k$ est-elle assurée d'avoir une solution dans $[0; 1]$?

3. Montrer que pour $k = \frac{1}{2}$, il existe une unique solution dans $[0; 1]$.

Partie C — Suites récurrentes et point fixe

Exercice 11 — Point fixe

a. Trouver les points fixes de $f(x) = x^2 - x + 1$. *(Résoudre $f(x) = x$)*

b. Trouver les points fixes de $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ $(x \neq -1)$.

c. Trouver les points fixes de $h(x) = \sqrt{x+2}$ $(x \geqslant -2)$.

Exercice 12 — Suite récurrente dans un intervalle stable

Soit $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si $u_n \in [0;1]$, alors $u_{n+1} \in [0;1]$. En déduire que $(u_n) \subset [0;1]$.

3. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1. En déduire qu'elle converge.

4. Calculer la limite ℓ de (u_n).

Exercice 13 — Convergence vers un point fixe

Soit $f(x) = \cos x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 (en radians, valeur approchée).

2. La suite semble-t-elle converger ? Vers quelle valeur ?

3. Admettre que (u_n) converge vers ℓ. Montrer que $\ell = \cos \ell$. Cette équation a-t-elle une solution ? (TVI)

Exercice 14 — Suite récurrente avec $f(x) = \sqrt{x+2}$

Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que f est croissante sur $[-2; +\infty[$.

2. Montrer que si $u_n \in [0;2]$, alors $u_{n+1} \in [0;2]$.

3. Montrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 2.

4. En déduire que (u_n) converge. Calculer $\ell = \lim u_n$.

Exercice 15 — Décroissance et convergence

Soit $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ $(x > -1)$ et (u_n) : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite est-elle monotone ?

2. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergent vers le même point fixe ℓ.

3. Calculer ℓ.

Partie D — Synthèse

Exercice 16 — Nombre de solutions d'une équation

Pour chaque équation, déterminer le nombre de solutions réelles en étudiant $f(x) - k$.

a. $x^3 - 3x = 1 \quad$ (étudier $f(x) = x^3 - 3x$)

b. $e^x = 2 - x$

c. $\ln x = 2 - x$

Exercice 17 — Suite récurrente et TVI

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ pour $x > 0$, où $a > 0$.

1. Montrer que $f(x) \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $x > 0$ (inégalité AM-GM).

2. Montrer que les points fixes de f sont $\pm\sqrt{a}$.

3. Soit (u_n) : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dans $[\sqrt{a}; +\infty[$.

4. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, donc converge vers $\sqrt{a}$.

5. *Application :* pour $a = 2$, $u_0 = 2$, calculer u_1, u_2, u_3. Comparer à $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Exercice 18 — Algorithme de dichotomie

1. Écrire un algorithme Python qui encadre $\sqrt[3]{5}$ à 10^{-3} près en cherchant la racine de $f(x) = x^3 - 5$ par dichotomie sur $[1; 2]$.

2. Combien d'itérations faut-il pour obtenir une précision de 10^{-6} ? *(La longueur est divisée par 2 à chaque étape.)*

Exercice 19 — Continuité et fonction définie par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$

1. Montrer que $|f(x)| \leqslant x^2$ pour $x \neq 0$.

2. En déduire que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

3. Conclure sur la continuité de f en 0.

Exercice 20 — TVI et inequation

Montrer que l'équation $x^5 + x^3 + x = 10$ admet exactement une solution réelle α, et que $\alpha \in [1; 2]$. Donner un encadrement de α à 0,1 près.

Partie E — Type Baccalauréat

Exercice 21 — Type Baccalauréat

Soit $f(x) = (x-1)e^x + 1$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que f s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$, en $x_0 = 0$. *(TVI + monotonie)*
4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ (méthode de Newton). Calculer u_1.

Exercice 22 — Type Baccalauréat

Soit $g(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Étudier les variations de g. Quel est le minimum ?
2. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet exactement deux solutions $\alpha < 1 < \beta$.
3. Montrer que $\alpha \in [0{,}1; 1]$ et $\beta \in [3; 4]$.
4. En appliquant le TVI, montrer que $\alpha \in [0{,}15; 0{,}16]$.

Exercice 23 — Type Baccalauréat

Soit $h(x) = \dfrac{2x}{e^x}$ et la suite (u_n) : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Calculer $h'(x)$. Montrer que h est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer que $h([0; +\infty[) \subset [0; 1]$.
3. Montrer que si $u_n \geqslant 0$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{2}{e}$.
4. La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 24 — Type Baccalauréat

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
2. Montrer que f admet exactement trois racines réelles $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.
3. Montrer que $\alpha_1 \in [-2; -1]$, $\alpha_2 \in [0; 1]$, $\alpha_3 \in [1; 2]$.
4. Calculer $f(0{,}3)$ et $f(0{,}4)$. En déduire un encadrement de α_2 à 0,1 près.

Exercice 25 — Type Baccalauréat

Soit $f(x) = xe^{1-x}$ et (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_{n+1} = u_n e^{1-u_n}$.

1. Montrer que les points fixes de f sont 0 et 1.
2. Montrer que $f(x) \in [0; e^{-1}]$ pour $x \in [1; 3]$ (utiliser le maximum de f).
3. En déduire que (u_n) converge. Vers quelle limite ?

Exercice 26 — Type Baccalauréat (Problème)

Soit $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$ sur $]-1; +\infty[$.

1. Calculer $f(0)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que f est convexe sur $]-1; +\infty[$.
3. En déduire que $f(x) \geqslant f(0) = 0$, soit $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ est **faux**. Reformuler correctement : montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$.
4. Conclure que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en utilisant le TVI et l'encadrement.

Exercice 27 — Type Baccalauréat

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{4}{x})$ pour $x > 0$.

1. Montrer que $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.
2. Soit (u_n) : $u_0 = 5$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) est dans $[2; 5]$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante, donc convergente. Calculer ℓ.
4. Lien avec $\sqrt{4} = 2$: interpréter la suite comme un algorithme de calcul de $\sqrt{4}$.

Exercice 28 — Type Baccalauréat

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x + 4$.

1. Montrer que g admet exactement deux racines positives $0 < \alpha < \beta$.
2. Montrer que $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [1; 3]$.
3. La suite (v_n) : $v_0 = 2$, $v_{n+1} = \dfrac{6v_n - 4}{v_n^2}$ converge-t-elle ? *(Remarquer que $v_{n+1} = \frac{6-4/v_n}{v_n}$ et que $v_n = \beta$ est un point fixe)*

Exercice 29 — Type Baccalauréat

Continuité et probabilités. Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire successivement 3 boules sans remise.

1. Soit $f(p) = 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p)$ le modèle continu où $p \in [0; 1]$ est la probabilité de tirer une boule rouge.

2. Montrer que f est continue sur $[0;1]$.
3. Calculer $f(0)$, $f(1)$, et $f(1/2)$.
4. Montrer qu'il existe $p_0 \in]0;1[$ tel que $f(p_0) = 1/2$.

Exercice 30 — Type Baccalauréat (Problème complet)

Soit $f(x) = 2x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet exactement deux zéros $\alpha < 0 < \beta$.
3. Montrer que $\alpha \in [-1;0]$ et $\beta \in [0;1]$.
4. Par dichotomie, encadrer β à 0,1 près.
5. Soit (u_n) : $u_0 = 0{,}5$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(u_n^2 + 1)$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 31 — Algorithme Python

On cherche une solution approchée de $\cos x = x$ (équation du point fixe de cosinus).

1. Montrer que l'équation $f(x) = \cos x - x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$.
2. Écrire un algorithme Python qui calcule α par dichotomie avec une précision de 10^{-6}.
3. Écrire un algorithme Python qui calcule α par la méthode itérative $x_{n+1} = \cos(x_n)$ en partant de $x_0 = 0$.

Exercice 32 — Type Baccalauréat

Soit $f(x) = xe^{-x^2}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ admet exactement deux solutions.
4. Montrer qu'une solution est dans $]0;1[$ et l'encadrer à 0,1 près.

Exercice 33 — Suite récurrente et TVI

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$.

1. Montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
2. Soit (u_n) : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) décroît et est minorée par 1.
3. En déduire que (u_n) converge. Calculer ℓ (résoudre $f(\ell) = \ell$).

Exercice 34 — Méthode de Newton

La méthode de Newton pour résoudre $g(x) = 0$ utilise la récurrence $x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$.

1. Appliquer la méthode de Newton à $g(x) = x^2 - 2$ avec $x_0 = 2$ pour calculer $\sqrt{2}$.
2. Calculer x_1 et x_2. Quelle est la précision obtenue ?
3. Montrer que $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$. Retrouver l'algorithme de Babylone.

Exercice 35 — Type Baccalauréat

Soit $h(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $h'(x)$ et montrer que h est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.
2. Montrer que $h(x) = 3$ admet exactement deux solutions.
3. Montrer qu'une solution est dans $[0{,}1;0{,}5]$ et l'encadrer à 0,1 près.

Exercice 36 — Suite et convergence

Soit $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ et (u_n) : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).
3. Calculer $|u_3 - \ell|$ numériquement.

Exercice 37 — Problème complet

Soit $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

1. Étudier les variations de f et calculer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions.
3. En noter une $\alpha < 0$ et l'encadrer à 0,1 près.
4. Soit (u_n) : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-u_n}$. Montrer que (u_n) converge vers un point fixe.

Exercice 38 — Bilan continuité

Soit $f(x) = x^3 + x - 4$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [1;2]$.
3. Écrire un algorithme Python qui donne α à 10^{-4} près.

Exercice 39 — Suite récurrente type Bac

Soit $g(x) = \sqrt{2x+3}$ et $(u_n) : u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Montrer que $g([-3/2; +\infty[) \subset [0; +\infty[$.

2. Montrer que si $u_n \in [0; 3]$, alors $u_{n+1} \in [0; 3]$.

3. Montrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 3.

4. Calculer la limite ℓ de (u_n).

Exercice 40 — Synthèse finale

Soit $f(x) = e^x - 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Montrer que f est convexe.

2. Déterminer le minimum de f et montrer que $f(x) \geqslant 0$ avec égalité en deux points.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$.

4. Par dichotomie, encadrer β à 0,1 près.

5. Soit $(u_n) : u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n} - 1}{2}$. Montrer que (u_n) converge vers β.

Site du cours

Corrigés des exercices

Scanne le QR code — **utspe.com**