

Terminale Spécialité Mathématiques

Chapitre 5 : Dérivation et convexité

45 exercices — Dérivées composées, dérivée seconde, convexité, points d'inflexion

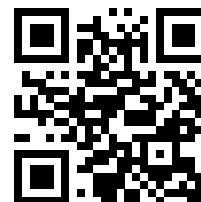
Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques

Thèmes : Dérivée d'une fonction composée, dérivée seconde, convexité, concavité, points d'inflexion, inégalités

Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU

Site : utspe.com

Exercices : 45 exercices progressifs + type Bac



Accéder au site
utspe.com

Rappel de cours

- **Dérivée composée :** $(v \circ u)'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$
- **Dérivée de $e^{u(x)}$:** $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$
- **Dérivée de $\sqrt{u(x)}$:** $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- **Dérivée de $\ln(u(x))$:** $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- **Dérivée seconde :** $f'' = (f')'$
- **Convexe** $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \Leftrightarrow f'$ croissante
- **Concave** $\Leftrightarrow f'' \leq 0 \Leftrightarrow f'$ décroissante
- **Point d'inflexion :** f'' s'annule en changeant de signe

Partie A — Dérivée d'une fonction composée

Exercice 1 — Identifier la composition



Pour chaque fonction, identifier u et v telles que $f = v \circ u$, puis calculer f' .

a. $f(x) = e^{3x}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

b. $f(x) = e^{x^2}$

e. $f(x) = (3x - 1)^5$

c. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

f. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 2 — Dérivées de $e^{u(x)}$



Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x) = e^{2x+5}$

e. $f(x) = 3e^{4x} - 2$

b. $f(x) = e^{-x}$

f. $f(x) = xe^{x^2}$

c. $f(x) = e^{x^2-3x}$

g. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

d. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

h. $f(x) = e^{-x^2+x}$

Exercice 3 — Dérivées de $\sqrt{u(x)}$


Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x) = \sqrt{3x-2}$

d. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

e. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

c. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ($|x| < 2$)

f. $f(x) = \sqrt{e^x+1}$

Exercice 4 — Dérivées de $\ln(u(x))$


Calculer la dérivée de chaque fonction (en précisant le domaine de définition).

a. $f(x) = \ln(3x)$

d. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

b. $f(x) = \ln(x^2+1)$

e. $f(x) = x \ln x$

c. $f(x) = \ln(2x-1)$

f. $f(x) = [\ln x]^2$

Exercice 5 — Dérivées composées mixtes


Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x) = e^{\ln x}$

d. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+4})$

b. $f(x) = \ln(e^x+1)$

e. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

c. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ($x > 1$)

f. $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

Exercice 6 — Équation de la tangente


a. Soit $f(x) = e^{2x-2}$. Calculer $f'(x)$ puis donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b. Soit $g(x) = \sqrt{x^2+3}$. Calculer $g'(x)$ puis donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse $x_0 = 1$.

c. Soit $h(x) = \ln(x^2+e)$. Calculer $h'(x)$ puis donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_h au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exercice 7 — Tableau de dérivées


Compléter le tableau suivant en calculant u , v , u' , v' et $f' = (v \circ u)'$.

$f(x)$	$u(x)$	$v(t)$	$u'(x)$	$v'(t)$	$f'(x)$
e^{3x+1}	$3x+1$	e^t	3	e^t	$3e^{3x+1}$
$(2x-1)^4$					
$\sqrt{x^2-5x}$					
$\ln(x^3+8)$					
$e^{-\frac{x^2}{2}}$					
$\frac{1}{(x+1)^2}$					


Exercice 8 — Vérification et correction d'erreurs


Un élève a calculé les dérivées suivantes. Identifier les erreurs et corriger.

a. $f(x) = e^{x^2}$ Réponse de l'élève : $f'(x) = e^{x^2}$ (vrai ou faux?)

b. $g(x) = \sqrt{2x+3}$ Réponse : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}$

c. $h(x) = (x^2+1)^3$ Réponse : $h'(x) = 3(x^2+1)^2$

d. $k(x) = \ln(x^2)$ Réponse : $k'(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercice 9 — Extremum d'une fonction composée


Soit $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$.

- Calculer $f'(x)$ (utiliser la règle du produit et la dérivée de e^x).
- Factoriser $f'(x)$ puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer $f(1)$, $f(3)$.

Exercice 10 — Optimisation


Une usine fabrique des pièces. Le coût de production de x pièces (en centaines d'euros) est modélisé par $C(x) = 2\sqrt{x^2+100}$.

- Calculer $C'(x)$. Interpréter le résultat.
- Montrer que C est croissante sur $[0; +\infty[$.
- Calculer $C'(10)$ et interpréter.

Partie B — Dérivée seconde

Exercice 11 — Calculer f''

Calculer la dérivée seconde de chaque fonction.

a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

e. $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$

b. $f(x) = 2x^3 - x$

f. $f(x) = x \ln x \quad (x > 0)$

c. $f(x) = e^{2x}$

g. $f(x) = e^{-x^2}$

d. $f(x) = xe^x$

h. $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Exercice 12 — Signe de f'' et monotonie de f'

Pour chaque fonction, calculer f'' puis déterminer les intervalles sur lesquels f' est croissante ou décroissante.

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

b. $f(x) = -x^4 + 4x^2$

c. $f(x) = xe^{-x}$

Exercice 13 — Dérivée seconde et accélération

La position d'un mobile à l'instant t (en secondes) est donnée par $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres), pour $t \in [0; 5]$.

1. Calculer la vitesse $v(t) = s'(t)$ et l'accélération $a(t) = s''(t)$.
2. À quel instant le mobile s'arrête-t-il ?
3. Sur quel intervalle l'accélération est-elle positive ? Interpréter.
4. Dresser le tableau de variations de v en utilisant a .

Exercice 14 — Lien f, f', f''

Soit $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f (en utilisant f').
4. Indiquer sur quel(s) intervalle(s) f' est croissante (en utilisant f'').

Exercice 15 — Reconstruction de f à partir de f''

On sait que $f''(x) = 6x - 2$, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 3$.

1. Trouver $f'(x)$ en intégrant f'' .
2. Trouver $f(x)$ en intégrant f' .

3. Vérifier les conditions initiales.



Partie C — Convexité et concavité

Rappel de cours

f est **convexe** sur $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'$ croissante sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ est *au-dessus* de toutes ses tangentes.
 f est **concave** sur $I \Leftrightarrow f'' \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'$ décroissante sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ est *au-dessous* de toutes ses tangentes.

Exercice 16 — Convexité par le signe de f''



Étudier la convexité de chaque fonction sur son domaine de définition.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a. $f(x) = x^2$ sur \mathbb{R} | d. $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$ |
| b. $f(x) = -x^2$ sur \mathbb{R} | e. $f(x) = x^3$ sur \mathbb{R} |
| c. $f(x) = e^x$ sur \mathbb{R} | f. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ |

Exercice 17 — Convexité sur un intervalle



Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

- Calculer $f''(x)$.
- Sur quel intervalle f est-elle convexe ? concave ?
- En déduire les intervalles sur lesquels f' est croissante.

Exercice 18 — Position par rapport aux tangentes



Soit $f(x) = e^x$.

- Vérifier que f est convexe sur \mathbb{R} .
- Écrire l'équation de la tangente T_a à \mathcal{C}_f en $x = a$.
- Montrer que $f(x) \geq T_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $e^x \geq e^a(x - a + 1)$.
- En déduire l'inégalité : $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (prendre $a = 0$).

Exercice 19 — Inégalité de convexité



Soit $f(x) = x^2$.

- Vérifier que f est convexe sur \mathbb{R} .
- Écrire la tangente en $x = a$, puis déduire que $x^2 \geq 2ax - a^2$ pour tout x .

- En prenant $a = \frac{x+y}{2}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \text{ pour tous réels } x, y.$$

Exercice 20 — Convexité de \ln

Soit $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer $f''(x)$ et montrer que f est concave.
2. En déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (tangente en $x = 1$).
3. En déduire que $\ln x \leq \frac{x-1}{2}$ est faux en général — trouver un contre-exemple.

Exercice 21 — Convexité et sécantes

Soit $f(x) = e^x$. Soient $A = (0; 1)$ et $B = (2; e^2)$ deux points de \mathcal{C}_f .

1. Écrire l'équation de la droite (AB) .
2. Montrer que $e^x \leq$ (valeur de la droite (AB) en x) pour tout $x \in [0; 2]$ est **fausse**.
Indication : la courbe est convexe, donc au-dessus des sécantes, pas en-dessous.
3. En quelle position la courbe de e^x se trouve-t-elle par rapport à (AB) sur $[0; 2]$?

Exercice 22 — Convexité d'une fonction composée

Soit $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et le simplifier sous la forme $f''(x) = (ax^2 + b)e^{-x^2}$.
3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité/concavité.
4. Donner les points d'inflexion.

Exercice 23 — Étude de convexité complète

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ définie sur \mathbb{R} .

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et le mettre sous la forme $\frac{ax^2 + b}{(x^2 + 1)^3}$.
3. Étudier le signe de f'' et déterminer les intervalles de convexité et de concavité.
4. Trouver les points d'inflexion et donner leurs coordonnées.

Exercice 24 — Inégalité via convexité

En utilisant la convexité de e^x , démontrer que pour tous réels a et b :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Indication : utiliser la définition de la convexité avec $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $t = \frac{1}{2}$.

Exercice 25 — Convexité et optimisation

Une entreprise modélise son profit par $P(x) = -x^3 + 6x^2$ pour $x \in [0; 5]$ (en milliers d'unités).

1. Calculer $P'(x)$ et $P''(x)$.
2. Sur quel intervalle le profit croît-il le plus vite ? (chercher où P' est max, c'est-à-dire où P'' change de signe)
3. Donner les intervalles de convexité et de concavité.
4. À partir de quel niveau de production la croissance du profit ralentit-elle ?

Partie D — Points d'inflexion**Rappel de cours**

$I(a; f(a))$ est un point d'inflexion $\Leftrightarrow f''(a) = 0$ ET f'' change de signe en a .

Exercice 26 — Trouver les points d'inflexion

Calculer f'' , résoudre $f''(x) = 0$, vérifier le changement de signe, puis donner les coordonnées des points d'inflexion.

- a. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- b. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$
- c. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
- d. $f(x) = x^5 - 5x^3$

Exercice 27 — Point d'inflexion de la courbe de Gauss

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$ (courbe en cloche de Gauss, utilisée en probabilités).

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et le factoriser.
3. Montrer que f admet deux points d'inflexion. Donner leurs abscisses.
4. Calculer les ordonnées correspondantes.

Exercice 28 — Tangente au point d'inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1. Montrer que $I = (1; 1)$ est un point d'inflexion.
2. Calculer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en I .
3. Vérifier que \mathcal{C}_f traverse sa tangente en I (étudier le signe de $f(x) - T(x)$).

Exercice 29 — Existence et nombre de points d'inflexion

- a. Montrer que $f(x) = x^4$ n'a pas de point d'inflexion (même si $f''(0) = 0$).
- b. Montrer que $g(x) = x^3$ a un point d'inflexion en $x = 0$.
- c. Soit $h(x) = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$. Montrer que h admet un point d'inflexion en $x = \pi$.
- d. Combien $f(x) = x^6 - 15x^4$ a-t-elle de points d'inflexion ? (Calculer f'' et résoudre.)

Exercice 30 — Points d'inflexion et symétrie

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

1. Trouver le point d'inflexion I de \mathcal{C}_f .
2. Montrer que la courbe est symétrique par rapport au point I , c'est-à-dire que $g(t) = f(a+t) + f(a-t) - 2f(a) = 0$ où a est l'abscisse de I .

Partie E — Études complètes et type Baccalauréat**Exercice 31 — Étude complète de $f(x) = xe^x$** 

1. Déterminer le domaine de définition et calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$. Dresser le tableau de variations.
3. Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles de convexité.
4. Existe-t-il un point d'inflexion ? Si oui, le calculer.
5. Écrire l'équation de la tangente au point d'inflexion.

Exercice 32 — Étude complète de $f(x) = x^2e^{-x}$ 

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations.
3. Calculer $f''(x)$ et le factoriser.
4. Déterminer les points d'inflexion.
5. Résumer les informations dans un tableau de signes de f'' .

Exercice 33 — Étude complète de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 

1. Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Calculer $f'(x)$ et étudier la monotonie.
3. Calculer $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

4. Déterminer la convexité et les points d'inflexion.
5. Calculer les limites en $\pm\infty$ et indiquer si la courbe a des asymptotes.


Exercice 34 — Tableau de signes de f''


À partir du tableau de signes de f'' ci-dessous, répondre aux questions.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Convexité	<i>convexe</i>		<i>concave</i>	<i>convexe</i>	

1. Sur quels intervalles f' est-elle croissante ?
2. En quels points f admet-elle des points d'inflexion ?
3. Sur quel intervalle la courbe est-elle au-dessus de ses tangentes ?
4. Si $f(-1) = 3$ et $f(2) = 1$, donner les coordonnées des points d'inflexion.

Exercice 35 — Problème d'optimisation avec convexité


Un fabricant modélise le coût moyen par unité par $C(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x}$ pour $x > 0$.

1. Simplifier $C(x)$ sous la forme $x - 4 + \frac{8}{x}$.
2. Calculer $C'(x)$ et trouver le minimum de C .
3. Calculer $C''(x)$ et vérifier que C est convexe sur $]0; +\infty[$.
4. Interpréter la convexité dans ce contexte économique.

Exercice 36 — Type Baccalauréat


Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 2)e^x$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)e^x$.
3. Résoudre $f'(x) = 0$ (solutions $x = -1 \pm \sqrt{3}$). Dresser le tableau de variations.
4. Montrer que $f''(x) = (x^2 + 4x)e^x$.
5. Trouver les points d'inflexion de \mathcal{C}_f .
6. Indiquer les intervalles de convexité et de concavité.

Exercice 37 — Type Baccalauréat


Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 \ln x$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f .
4. Montrer que $f(x) \geq 1 + \ln(2) - \ln(2) = 1$ pour tout $x > 0$.
Indication : le minimum vaut $f(2) = 2 - 2 \ln 2$.
5. En déduire que $x \geq 2 \ln x + 1$ pour tout $x > 0$.



Exercice 38 — Type Baccalauréat



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation.
3. Montrer que $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$.
4. En déduire les intervalles de convexité et le point d'inflexion.
5. Montrer que la courbe est symétrique par rapport au point $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 39 — Type Baccalauréat (Problème)



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Partie A — Étude de f

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Calculer $f''(x)$ et déterminer les points d'inflexion.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

Partie B — Tangente et convexité

4. Écrire l'équation de la tangente T en le point d'inflexion.
5. Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à T selon les intervalles de convexité.

Exercice 40 — Type Baccalauréat (Synthèse)



Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{2}$.

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que g admet un maximum en $x = 1$.
2. Calculer $g(1)$. En déduire que $\ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Calculer $g''(x)$ et étudier la convexité de g .

4. À quelle(s) valeur(s) de x la courbe de g admet-elle un point d'inflexion ?



5. Montrer que l'inégalité $\ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$ est plus précise que $\ln x \leq x - 1$ pour x grand.

Exercice 41 — Type Baccalauréat (Problème complet)



Soit $h(x) = (2x - 1)e^{-2x}$ définie sur \mathbb{R} .

Partie A — Étude des variations

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
2. Montrer que $h'(x) = -2(2x - 2)e^{-2x} = 4(1 - x)e^{-2x}$.
3. Dresser le tableau de variations de h .

Partie B — Convexité

4. Montrer que $h''(x) = 4(2x - 3)e^{-2x}$.
5. Déterminer le point d'inflexion de la courbe de h .
6. Écrire l'équation de la tangente en ce point d'inflexion.

Partie C — Équation

7. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
8. Donner l'encadrement de α à 10^{-1} près.

Exercice 42 — Type Baccalauréat — Suites et convexité



Soit $f(x) = 2 - \frac{1}{e^x} = 2 - e^{-x}$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que si $u_n \in [0; 2]$, alors $u_{n+1} \in [0; 2]$. En déduire que la suite est bien définie dans $[0; 2]$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. En déduire qu'elle converge.
4. Calculer la limite ℓ de (u_n) en résolvant $f(\ell) = \ell$.
5. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f . Quel lien avec la vitesse de convergence ?

Exercice 43 — Type Baccalauréat — Inégalité et convexité



L'objectif est de démontrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x - 1$.

1. Soit $\varphi(x) = \ln x - (x - 1)$. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que φ admet un maximum en $x = 1$.
2. Calculer $\varphi(1)$ et conclure.

3. Calculer $\varphi''(x)$. En déduire que φ est concave, puis que la tangente en $x = 1$ est *au-dessus* de la courbe.
4. Application : en substituant x par $\frac{1}{x}$, montrer que $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ pour $x > 0$.
5. En déduire l'encadrement : $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$.


Exercice 44 — Type Baccalauréat — Étude paramétrique


Soit $f_k(x) = e^x - kx$ pour $k > 0$ donné.

1. Calculer $f'_k(x)$ et trouver le minimum de f_k (en fonction de k).
2. Calculer $f''_k(x)$ et montrer que f_k est toujours convexe, quel que soit $k > 0$.
3. Montrer que le minimum vaut $k(1 - \ln k)$.
4. Pour quelle valeur de k ce minimum est-il nul ? En déduire que $e^x \geq ex$ pour tout x .
5. Généralisation : montrer que $e^x \geq \frac{e^a}{a} \cdot x$ pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 45 — Type Baccalauréat — Problème complet


Soit $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{e^x}$ où a et b sont des réels.

Partie A — Détermination des paramètres

1. Sachant que $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$, déterminer a et b .

Partie B — Étude avec les valeurs trouvées ($a = -2$, $b = 1$)

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{e^x}$ puis dresser le tableau de variations.
4. Calculer $f''(x)$ et le mettre sous la forme $\frac{-x^2 + 6x - 5}{e^x}$.
5. Trouver les points d'inflexion (résoudre $f''(x) = 0$).
6. Dresser un tableau récapitulatif : signe de f' , variations de f , signe de f'' , convexité.

Récapitulatif — Dérivation et convexité

Notion	Définition / Critère	Conséquence
Dérivée composée	$(v \circ u)' = u' \cdot v' \circ u$	Outil de calcul
$(e^u)'$	$u' e^u$	Toujours même signe que u'
$(\sqrt{u})'$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Défini si $u > 0$
$(\ln u)'$	$\frac{u'}{u}$	Défini si $u > 0$
Dérivée seconde	$f'' = (f')'$	Mesure la courbure
Convexe	$f'' \geq 0$	\mathcal{C}_f au-dessus des tangentes
Concave	$f'' \leq 0$	\mathcal{C}_f au-dessous des tangentes
Point d'inflexion	f'' s'annule en changeant de signe	Courbe traverse sa tangente



Site du cours



Corrigés des exercices

 Scanne le QR code pour accéder aux corrigés sur utspe.com