Terminale Spécialité Mathématiques

Chapitre 3 : Limites de fonctions

Fiche d'exercices — Limites en $\pm\infty$, en un réel, formes indéterminées, asymptotes

---

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques
Thèmes : Limites en $\pm\infty$, limites en un réel, formes indéterminées, théorème des gendarmes, croissances comparées, asymptotes
Auteur : M. Ulrich TCHISSAMBOU
Site : `utspe.com`

Rappels — Capacités exigibles (Programme officiel)

- Déterminer la limite d'une fonction en $\pm\infty$ ou en un réel.
- Lever une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$).
- Utiliser le théorème des gendarmes, la règle des croissances comparées.
- Déterminer et interpréter graphiquement une asymptote (horizontale, verticale, oblique).
- Utiliser la composition de limites (limite de $g \circ f$).

Rappels — Limites usuelles à connaître

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad (n \geqslant 1)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \geqslant 1)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\,; \quad \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad$ (croissances comparées)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0)$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ si $\ell_2 \neq 0$

Table des matières

1 Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Méthode — Limite d'un polynôme en $\pm\infty$

La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est déterminée par son **terme de plus haut degré**.

Exercice 1 — Polynômes

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^2 + 2)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - 4x + 1)$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + 3x^3 - 7)$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^6 - 100x^5)$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5x)(x + 3)$

f. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x^2)(2x - 1)$

Exercice 2 — Fractions rationnelles (terme dominant)

Calculer les limites suivantes en factorisant par le terme dominant.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{2x^2 - 5}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x - 3}{x^2 + 1}$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 2x}{3x^3 + 7}$

e. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 4}{-3x^2 + 5x}$

f. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(2x-1)(3x+4)}$

Exercice 3 — Fonctions avec racine carrée

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x}}{2x - 1}$

Remarque

Pour la limite de $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$, factoriser x^2 sous la racine : $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ (avec $x > 0$).

2 Limites en un réel — Asymptotes verticales

Définition — Asymptote verticale

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Méthode — Déterminer le signe de $f(x)$ au voisinage d'un point

Utiliser un tableau de signes (avec **tkz-tab**) pour étudier le signe du numérateur et du dénominateur séparément, puis déduire le signe du quotient.

Exercice 4 — Limites en un réel, forme $\frac{\ell}{0}$

Pour chaque fonction, calculer les limites à gauche et à droite du point indiqué, puis conclure sur l'existence d'une asymptote verticale.

a. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ en $x = 2$.

b. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ en $x = 2$ puis en $x = -2$.

c. $h(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2}$ en $x = -3$.

d. $k(x) = \dfrac{x^2}{2x-6}$ en $x = 3$.

e. $\ell(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$ en ses points de discontinuité.

Exercice 5 — Limite en 0 de fonctions usuelles

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

d. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Remarque

Les deux dernières limites sont des limites remarquables à connaître : elles valent toutes les deux 1.

3 Formes indéterminées

Rappel — Les 4 formes indéterminées classiques

Forme	**Situation**	**Technique**
$\infty - \infty$	diff. de deux grandes quantités	Factoriser, ou expression conjuguée
$\frac{\infty}{\infty}$	fract. rationnelle en $\pm\infty$	Factoriser par le terme dominant
$\frac{0}{0}$	annulation commune	Factoriser (identités remarquables, $\div(x-a)$)
$0 \times \infty$	produit nul $\times$ infini	Écrire comme quotient $\frac{0}{1/\infty}$ ou $\frac{\infty}{1/0}$

Exercice 6 — Forme $\infty - \infty$ (polynômes)

Calculer les limites suivantes (factoriser par le terme dominant).

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 + 5x)$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - x^3)$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 2x^3 + x)$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$

f. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)$

Méthode — Expression conjuguée

Pour $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, multiplier et diviser par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.

Exercice 7 — Forme $\frac{0}{0}$ (factorisation)

Calculer les limites suivantes en factorisant le numérateur et le dénominateur.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Exercice 8 — Forme $0 \times \infty$

Calculer les limites suivantes en réécrivant comme un quotient.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

d. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

Exercice 9 — Bilan formes indéterminées

Identifier la forme indéterminée puis calculer chaque limite.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

b. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

4 Théorème des gendarmes

Théorème — Théorème des gendarmes (rappel)

Soient f, g, h trois fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si, au voisinage de a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$,
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exercice 10 — Application directe du théorème des gendarmes

a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.
Indication : utiliser $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2} = 0$.

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x} = 0$.

d. On pose $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$.
En utilisant $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, montrer que $\dfrac{-x}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$ pour $x > 0$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 11 — Encadrement à construire

a. Sachant que pour tout $x > 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

b. On admet que $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$.

c. Soit $f(x) = \dfrac{3+2\cos x}{x^2+1}$ pour $x \geqslant 0$.

Encadrer $f(x)$ puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5 Croissances comparées

Propriété — Croissances comparées — à connaître par cœur

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$$

Mnémotechnique : l'exponentielle **l'emporte** sur les puissances ; le logarithme est **dominé** par les puissances.

Exercice 12 — Application des croissances comparées

Calculer les limites suivantes en utilisant les croissances comparées.

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^x}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$

c. $\lim_{x\to-\infty} x^3 e^x$

d. $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{2x}$

e. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

f. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

g. $\lim_{x\to0^+} x \ln x$

h. $\lim_{x\to0^+} x^3 \ln(x^2)$

Exercice 13 — Croissances comparées appliquées

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - e^x)$.

Indication : écrire $x^2 - e^x = e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - 1\right)$.

b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^2}{e^x + x}$.

c. Calculer $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x/2}$.

d. Calculer $\lim_{x\to0^+} (1 + \ln x)x$.

6 Composition de limites

Théorème — Composition de limites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Méthode — Utiliser la composition

Poser $u = f(x)$ et chercher $\lim\limits_{u \to b} g(u)$.

Exercice 14 — Composition de limites

Calculer les limites suivantes en utilisant la composition.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2}$. *Indication : poser* $u = -x^2$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. *Indication : poser* $u = \dfrac{x+1}{x}$.

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\ln x}$.

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

e. $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$.

f. $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$.

7 Asymptotes

Définition — Les trois types d'asymptotes

- **Asymptote horizontale en** $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. La droite $y = \ell$ est une A.H.
- **Asymptote verticale en** a : $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. La droite $x = a$ est une A.V.
- **Asymptote oblique en** $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

  On trouve $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$.

Exercice 15 — Asymptotes horizontales et verticales

Pour chaque fonction, déterminer les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.

a. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

b. $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-9}$

c. $h(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

d. $k(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

e. $p(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$

Exercice 16 — Asymptote oblique

a. Montrer que la courbe de $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
Indication : écrire $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$.

b. Déterminer l'asymptote oblique de $g(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$ en effectuant la division euclidienne.

c. Montrer que la courbe de $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ admet l'asymptote oblique $y = x$ en $+\infty$.
Calculer $h(x) - x$ et interpréter.

Exercice 17 — Bilan asymptotes

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Factoriser $x^2 + 2x - 3$.

c. Simplifier $f(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduire la nature de la discontinuité en $x = 1$.

d. La courbe admet-elle une asymptote verticale en $x = 1$?
Observer que le numérateur s'annule aussi en $x = 1$.

e. Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ et en déduire la présence d'une asymptote oblique.

8 Prolongement par continuité

Définition — Prolongement par continuité

Si f est définie sur $D \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
on peut prolonger f par continuité en posant $\tilde{f}(a) = \ell$.

Exercice 18 — Prolongement par continuité

Pour chaque fonction, vérifier qu'elle est prolongeable par continuité en a et déterminer la valeur du prolongement.

a. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ en $a = 3$.

b. $g(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$ en $a = 0$.

c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en $a = 0$.

d. $k(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en $a = 0$.

9 Exercices de synthèse

Exercice 19 — Étude complète d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Factoriser le numérateur et le dénominateur.

c. Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.

d. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

e. Conclure sur les asymptotes horizontales et verticales.

Exercice 20 — Étude complète d'une fonction avec exponentielle

Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Conclure.

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

d. La fonction admet-elle une asymptote oblique ? Justifier.

Exercice 21 — Étude complète d'une fonction avec logarithme

Soit $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. *Indication : utiliser* $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

c. Étudier le signe de $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et en déduire le minimum de f.

d. Justifier que $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$, soit $x - \ln x \geqslant 1$, c'est-à-dire $\ln x \leqslant x - 1$.

10 Exercices type Baccalauréat

Exercice 22 — Type Baccalauréat

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.
En déduire si $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

2. Montrer que $f(x) = x - \dfrac{2}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$.
Effectuer la division de $x^2 + x - 2$ par $x + 1$.

3. En déduire que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$.

4. Étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.
Étudier le signe de $f(x) - x = -\dfrac{2}{x+1}$ selon que $x > -1$ ou $x < -1$.

Exercice 23 — Type Baccalauréat

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Justifier soigneusement en utilisant les croissances comparées.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

3. Montrer que $g'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$.

4. Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

5. Calculer $g(3/2)$ et préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 — Type Baccalauréat

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$. Interpréter graphiquement.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$. Interpréter graphiquement.

3. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.

4. Dresser le tableau de variations complet de h.

5. En déduire que $h(x) \leqslant h(e) = \dfrac{1}{e}$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire que $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$.

Exercice 25 — Type Baccalauréat

(D'après BAC 2023) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
La courbe de f admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, laquelle ?

3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

5. Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 26 — Problème — Type Baccalauréat

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie A — Étude de f

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Montrer que $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.

3. Dresser le tableau de variations de f et calculer $f(1)$, $f(-1)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions, dont une dans $]-1\,;0[$ et une dans $]0\,;1[$.

Partie B — Asymptote et position

5. Montrer que la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

6. Étudier la position de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses selon le signe de $x+2$.

Récapitulatif — Limites de fonctions

Situation	**Limite**	**Technique**
Polynôme en $\pm\infty$	$\pm\infty$	Terme de plus haut degré
Fraction rationnelle en $\pm\infty$	réel ou $\pm\infty$	Factoriser par x^n dominant
Forme $\frac{\ell}{0^+}$	$\pm\infty$	Signe du numérateur / dénominateur
Forme $\frac{0}{0}$	à calculer	Factoriser, simplifier
Forme $\infty - \infty$	à calculer	Factoriser ou conjugué
Théorème des gendarmes	ℓ	Encadrer $f(x)$ par g et $h \to \ell$
Croissances comparées	0 ou $+\infty$	$e^x \gg x^n \gg \ln x$
Asymptote oblique	droite $y = ax + b$	$a = \lim \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim(f - ax)$

Corrigés et exercices complémentaires disponibles sur **utspe.com**