Terminale Spécialité Mathématiques

Chapitre 1 : Suites numériques

Cours complet — Récurrence, Monotonie, Limites, Algorithmes

Niveau :	Terminale Spécialité Mathématiques
Thèmes :	Suites arithmétiques/géométriques, récurrence, monotonie, limites, seuil, algorithmique
Auteur :	M. Ulrich TCHISSAMBOU
Site :	`utspe.com`

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier le sens de variation et les limites de suites.
- Connaître et utiliser les suites arithmétiques et géométriques.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite récurrente.
- **Démonstration exigible :** Inégalité de Bernoulli $(1+a)^n \geqslant 1+na$ par récurrence.
- **Algorithmique :** Recherche de seuils.

Table des matières

1 Suites arithmétiques et géométriques

1.1 Suites arithmétiques

Définition — Suite arithmétique

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le terme général est alors : $u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)r$.

Propriété — Somme des termes d'une suite arithmétique

Si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, la somme des $(n+1)$ premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Rappel utile : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ est arithmétique de raison $r = 5$.

- Terme général : $u_n = 3 + 5n$.
- $u_{10} = 3 + 50 = 53$.
- Somme des 11 premiers termes : $S = 11 \times \dfrac{3+53}{2} = 11 \times 28 = 308$.

Remarque

Une suite arithmétique de raison r est : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$.

1.2 Suites géométriques

Définition — Suite géométrique

Une suite (v_n) est dite **géométrique** de raison $q \neq 0$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = q \cdot v_n$$

Le terme général est alors : $v_n = v_0 \cdot q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \cdot q^{n-p}$.

Propriété — Somme des termes d'une suite géométrique

Si (v_n) est géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $v_0 \neq 0$:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

La suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n$ est géométrique de raison $q = 3$.

- Terme général : $v_n = 2 \times 3^n$.
- $v_5 = 2 \times 243 = 486$.
- Somme des 6 premiers termes : $S = 2 \times \dfrac{1 - 3^6}{1 - 3} = 2 \times \dfrac{-728}{-2} = 728$.

Remarque

Une suite géométrique à termes positifs et de raison $q > 0$ est : croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$, constante si $q = 1$.

2 Raisonnement par récurrence

Théorème — Principe de récurrence

Soient n_0 un entier et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Si :

1. **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** Pour tout entier $k \geqslant n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthode — Rédiger une preuve par récurrence

Étape 1. Énoncer clairement la propriété $P(n)$.

Étape 2. Initialisation : vérifier que $P(n_0)$ est vraie (calcul explicite).

Étape 3. Hérédité : supposer $P(k)$ vraie pour un $k \geqslant n_0$ fixé, puis *démontrer* $P(k+1)$.

Étape 4. Conclusion : conclure par le principe de récurrence.

Exemple — Terme général

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrons que $u_n = 2 \times 3^n + 1$.
Notons $P(n)$: $\ll u_n = 2 \times 3^n + 1 \gg$.
Initialisation : $2 \times 3^0 + 1 = 3 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_k = 2 \times 3^k + 1$. Alors :

$$u_{k+1} = 3u_k - 2 = 3(2 \times 3^k + 1) - 2 = 2 \times 3^{k+1} + 3 - 2 = 2 \times 3^{k+1} + 1.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $u_n = 2 \times 3^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple — Somme

Montrons que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$: $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Vrai.

Hérédité : Supposons $1 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Alors :

$$1 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$P(k+1)$ est vraie.
Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Théorème — Inégalité de Bernoulli (démonstration exigible au BAC)

Pour tout réel $a > -1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Exemple — Preuve de l'inégalité de Bernoulli

Soit $a > -1$. Notons $P(n)$: ≪ $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ≫.
Initialisation : $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \times a = 1$. Vrai.
Hérédité : Supposons $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$. Comme $1 + a > 0$:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a.$$

Conclusion : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention

Une récurrence mal rédigée est une récurrence incomplète. Les trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion) sont **obligatoires**. L'oubli de l'initialisation ou d'une conclusion explicite est pénalisé au BAC.

3 Sens de variation d'une suite

Définition — Monotonie

Soit (u_n) une suite réelle.

- (u_n) est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ pour tout n.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant m$ pour tout n.
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Méthode — Étudier le sens de variation

- **Méthode 1 — Différence :** Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
  - $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \Rightarrow (u_n)$ croissante.
  - $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \Rightarrow (u_n)$ décroissante.

- **Méthode 2 — Quotient** (si $u_n > 0$) : Étudier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.
- **Méthode 3 — Fonction :** Si $u_n = f(n)$, étudier le signe de f' sur $[0; +\infty[$.
- **Méthode 4 — Récurrence :** Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant u_{n+1}$ (ou $\geqslant$).

Exemple

Étudier la monotonie de $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+4} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{2}{(n+4)(n+3)} > 0.$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

4 Limites de suites

4.1 Limites infinies et finies

Définition — Limite d'une suite

- (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$.
- (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Si (u_n) converge, sa limite est unique.

Propriété — Limites usuelles

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \quad (k > 0)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\text{coeff. dominant}(P)}{\text{coeff. dominant}(Q)}$

Méthode — Calculer la limite d'une fraction rationnelle

Factoriser le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance de n présente.

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + n - 4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(5 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2})} = \frac{3}{5}.$$

4.2 Théorèmes de convergence

Théorème — Suite monotone bornée

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème — Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

Si $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant N$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Soit $u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n}$. Comme $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{n}$.
Or $\lim \dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{3}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Propriété — Croissances comparées

Pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 \quad \text{si } q > 1.$$

Les exponentielles l'emportent sur les puissances.

5 Suites récurrentes

5.1 Suite récurrente affine

Méthode — Résoudre $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$

1. Trouver le **point fixe** ℓ : résoudre $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$ et montrer que (v_n) est géométrique de raison a.
3. En déduire $v_n = v_0 \cdot a^n$, puis $u_n = \ell + (u_0 - \ell) \cdot a^n$.
4. Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.

Point fixe : $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + 4 \Rightarrow \ell = 8$.

Suite auxiliaire : $v_n = u_n - 8$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \dfrac{1}{2}u_n + 4 - 8 = \dfrac{1}{2}(u_n - 8) = \dfrac{1}{2}v_n$.

(v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $v_0 = u_0 - 8 = -6$.

Donc $v_n = -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit $\boxed{u_n = 8 - 6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Comme $\dfrac{1}{2} < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

5.2 Limites et points fixes

Méthode — Chercher la limite d'une suite récurrente convergente

Si (u_n) converge vers ℓ et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

Remarque

L'existence d'un point fixe ne garantit pas la convergence — il faut le démontrer séparément (suite monotone bornée, par exemple).

6 Algorithmique — Recherche de seuil

Définition — Problème de seuil

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant S$ (ou $u_n \leqslant S$) pour un seuil S donné.

- Si la suite est géométrique et que l'inégalité peut s'exprimer avec q^n, on utilise les logarithmes.
- Sinon, on utilise une boucle `while` (algorithme de seuil).

Méthode — Algorithme de seuil — boucle `while`

```
u = u0           # valeur initiale
n = 0
while u < S:     # condition de seuil
    u = a * u + b    # relation de recurrence
    n = n + 1
print(n)         # premier rang depasse le seuil
```

Exemple — Seuil avec logarithme

Un capital de 1 000 € est placé à 3 % par an. À partir de quelle année dépasse-t-il 1 500 € ?
$C_n = 1000 \times 1{,}03^n \geqslant 1500 \Leftrightarrow 1{,}03^n \geqslant 1{,}5 \Leftrightarrow n\ln(1{,}03) \geqslant \ln(1{,}5) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} \approx 13{,}7.$
Donc à partir de l'année $n = 14$.

Exemple — Seuil avec algorithme

Soit $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 15$. Trouver le premier rang n tel que $u_n \geqslant 140$.

```
u = 100
n = 0
while u < 140:
    u = 0.9 * u + 15
    n = n + 1
print(n)    # affiche 12
```

Le premier rang est $n = 12$.

Synthèse – Tableau récapitulatif

Récapitulatif du chapitre

Type	**Relation**	**Terme général**
Suite arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_n = u_0 + nr$
Suite géométrique	$u_{n+1} = q\,u_n$	$u_n = u_0 \cdot q^n$
Suite affine récurrente	$u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 1$	$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$, $\ell = \dfrac{b}{1-a}$

Théorème	**Énoncé**
Récurrence	Init. + Hérédité $\Rightarrow$ propriété vraie pour tout n
Bernoulli	$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour $a > -1$
Monotone bornée	Croissante majorée $\Rightarrow$ convergente
Gendarmes	$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ et $a_n, b_n \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$

Exercices et corrigés disponibles sur **utspe.com/corriges/suites**